运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 04. 001

一类不可微多目标分式规划问题的最优性条件*

赵克全, 唐莉萍
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要:本文在高阶 (F,α,ρ,d)-凸性条件下,讨论了一类带支撑函数的不可微多目标分式规划问题的最优性条件。对于问题(MFP),在 $h_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为严格高阶 (F,α,ρ,d)-凸性条件下建立了弱有效解的 Kuhn-Tucker 最优性必要条件;对于问题(MFP),在 $f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle$、$-g(\cdot)$ 和 $h_j(j=1,\cdots,m)$ 关于 $\phi_i(i=1,\cdots,p)$ 为高阶 (F,α,ρ,d)-凸性条件下给出了弱有效解的 Kuhn-Tucker 最优性充分条件。

关键词:高阶 (F,α,ρ,d)-凸性;不可微多目标分式规划问题;弱有效解;最优性条件

中图分类号:O221.2;O172.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)04-0001-04

近年来,许多学者在各类广义凸性条件下研究了多目标分式规划问题的一些最优性必要和充分性条件以及对偶结果[1-15]。最近,陈秀宏等人在文献[12]中引入了一类新的广义凸性—高阶 (F,α,ρ,d)-凸性的定义,证明了高阶 (F,α,ρ,d)-凸性对商运算的封闭性,建立了高阶 (F,α,ρ,d)-凸性条件下的择一性定理。同时利用该择一性定理研究了带高阶 (F,α,ρ,d)-凸性的多目标分式规划问题的一些最优性充分条件和对偶结果。

本文在文献[9]和文献[12]的基础上,考虑如下的多目标分式规划问题

$$(\mathrm{MFP}) \quad \min G(x)=\left(\frac{f_1(x)+s(x\mid C_1)}{g_1(x)},\cdots,\frac{f_p(x)+s(x\mid C_p)}{g_p(x)}\right)$$

$$\text{s.t. } h(x)=(h_1(x),\cdots,h_m(x))^{\mathrm{T}}\leqq 0, x\in C$$

$C\subseteq \mathbf{R}^n$ 为开凸集,$f_i:C\to\mathbf{R}$,$g_i:C\to\mathbf{R}(i=1,\cdots,p)$ $h_j:C\to\mathbf{R}(j\in J=\{1,\cdots,m\})$。

假设 $f_i(x)\geqslant 0$,$g_i(x)>0(i=1,\cdots,p)$,定义(MFP)的可行解集为 $S=\{x\in C:h(x)\leqq 0\}$,$I(x_0)=\{j\in J:h_j(x_0)=0\}$。同时,$C_i(i=1,\cdots,p)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧凸集,$s(x\mid C_i)=\max\{\langle x,y\rangle:y\in C_i\}$,令 $k_i=s(x\mid C_i)(i=1,\cdots,p)$,且 k_i 是一个凸函数 $\partial k_i=\{w\in C_i:\langle w,x\rangle=s(x\mid C_i)\}$。

在高阶 (F,α,ρ,d)-凸性条件下研究了该类规划问题的最优性条件。

1 预备知识

首先引入一些常见的记号。如果 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$:$x=y\Leftrightarrow x_i=y_i,\forall i=1,\cdots,n$;$x<y\Leftrightarrow x_i<y_i,\forall i=1,\cdots,n$;$x\leqq y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,\forall i=1,\cdots,n$;$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,\forall i=1,\cdots,n$,这里至少存在一个 j 使得 $x_j<y_j$。

定义 1 $F:C\times C\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为关于第三变量次线性,若 $\forall x^1,x^2\in C$,则有

1) $F(x^1,x^2;a^1+a^2)\leqslant F(x^1,x^2;a^1)+F(x^1,x^2;a^2),\forall a^1,a^2\in\mathbf{R}^n$;

2) $F(x^1,x^2;\alpha a)=\alpha F(x^1,x^2;a),\forall a\in\mathbf{R}^n$。

定义 2[12] 设 $\phi:C\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 可微,F 关于第三变量次线性,$\rho\in\mathbf{R}$,$d(\cdot,\cdot)$ 是一个伪度量。可微函数 ψ:$C\to\mathbf{R}$ 称为在 $u\in C$ 关于 ϕ 的高阶 (F,α,ρ,d)-凸,对 $\forall(x,p)\in C\times\mathbf{R}^n$,有

$$\psi(x)-\psi(u)\geqslant F(x,u,\alpha(x,u))[\nabla\psi(u)+\nabla_p\phi(u,p)]+$$

* 收稿日期:2010-05-15 修回日期:2010-06-17
资助项目:重庆师范大学青年基金(No. 08XLQ01)
作者简介:赵克全,男,讲师,博士研究生,研究方向为多目标优化理论。

$$\alpha(x,u)\{\phi(u,p)-p^{\mathrm{T}}[\nabla_p\phi(u,p)]\}+\rho d^2(x,u)$$

其中 $\alpha:C\times C\to\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$。

定义3[12] $\bar{x}$ 称为(MFP)的有效解,若不存在另一个可行点使得 $G(x)\leqslant G(\bar{x})$。

定义4[12] $\bar{x}$ 称为(MFP)的弱有效解,若不存在另一个可行点使得 $G(x)<G(\bar{x})$。

2 最优性条件

仿效文献[12]中的定理2.1的证明可得如下结论。

定理1 设 f 和 $g:C\to\mathbf{R}^p$ 可微,$\forall x\in C$,$f(x)+\langle w,x\rangle\geqslant 0$,$g(x)>0$,$\phi:C\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是可微函数。若 $f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle$ 和 $-g(\cdot)$ 在 $x_0\in C$ 关于同一函数 ϕ 是高阶(F,α,ρ,d)凸。则 $\dfrac{f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle}{g(\cdot)}$ 在 x_0 关于 $\bar{\phi}$ 为高阶(F,α,ρ,d)凸。其中

$$\bar{\alpha}(x,x_0)=\alpha(x,x_0)\frac{g(x_0)}{g(x)}$$

$$\bar{\phi}(x_0,p)=\left[\frac{1}{g(x_0)}+\frac{f(x_0)+\langle w,x_0\rangle}{g^2(x_0)}\right]\phi(x_0,p),\ \bar{d}(x,x_0)=\left[\frac{1}{g(x)}+\frac{f(x_0)+\langle w,x_0\rangle}{g(x)g(x_0)}\right]^{\frac{1}{2}}d(x,x_0)$$

定理2[9] (Fritz-John最优性必要条件)若 $x_0\in C$ 是(MFP)的一个弱有效解,则存在 $\lambda_i(i=1,\cdots,p)$,$\mu_j(j=1,\cdots,m)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla\left(\frac{f_i(x_0)+\langle w_i,x_0\rangle}{g_i(x_0)}\right)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla h_j(x_0)=0 \tag{1}$$

$$\langle w_i,x_0\rangle=s(x_0\mid C_i),w_i\in C_i(i=1,\cdots,p) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jh_j(x_0)=0 \tag{3}$$

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_m)\geqq 0,(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\mu_1,\cdots,\mu_m)\neq 0 \tag{4}$$

定理3 (Kuhn-Tucker最优性必要条件)设 $x_0\in C$ 是(MFP)的一个弱有效解,$h_j(j=1,\cdots,m)$ 在 x_0 关于 ϕ_j 是严格高阶(F,α,ρ,d)-凸,且 $\phi_j(x_0,p)=rp^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0)(r\in\mathbf{R})$,$\sum_{j\in I(x_0)}\mu_j\rho_j\geqslant 0$,则存在 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,\cdots,p)$,$\mu_j\geqslant 0(j=1,\cdots,m)$,$w_i\in C_i(i=1,\cdots,p)$ 有

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla\left(\frac{f_i(x_0)+\langle w_i,x_0\rangle}{g_i(x_0)}\right)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla h_j(x_0)=0 \tag{5}$$

$$\langle w_i,x_0\rangle=S(x_0\mid C_i),w_i\in C_i,i=(1,\cdots,p) \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_jh_j(x_0)=0 \tag{7}$$

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\neq(0,\cdots,0) \tag{8}$$

证明 因为 x_0 是(MFP)的弱有效解,根据定理2,存在 $\lambda_i(i=1,\cdots,p)$,$\mu_j(j=1,\cdots,m)$ 使得(1)~(4)式在 x_0 成立。又因为 $\mu_jh_j(x_0)=0$,$\mu_j\geqslant 0$,$\forall j\in I(x_0)$,得到 $\mu_k=0$,$\forall k\notin I(x_0)$,至少存在 j_0 使得 $\mu_{j_0}>0$,$j_0\in I(x_0)$ 则

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla\left(\frac{f_i(x_0)+\langle w_i,x_0\rangle}{g_i(x_0)}\right)+\sum_{j=I(x_0)}\mu_j\nabla h_j(x_0)=0 \tag{9}$$

且 $\langle w_i,x_0\rangle=S(x_0\mid C_i)$,$i=(1,\cdots,p)$。设 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\neq(0,\cdots,0)$。利用(9)式可得

$$\sum_{j\in I(x_0)}\nabla\mu_jh_j(x_0)=0 \tag{10}$$

然而,$h_j(j=1,\cdots,m)$ 在 x_0 关于 ϕ_j 是严格高阶(F,α,ρ,d)凸,可得

$$0\geqslant h_j(x)-h_j(x_0)>F(x,x_0;\alpha(x,x_0)[\nabla h_j(x_0)+\nabla_p\phi_j(x_0,p)])+$$
$$\alpha(x,x_o)\{\phi_j(x_0,p)\}-p^{\mathrm{T}}[\nabla_p\phi(x_0,p)]\}+\rho_jd^2(x,x_0)$$

因为 $\phi_j(x_0,p)=rp^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0)(r\in\mathbf{R})$ 得到

$$0>F(x,x_0;\alpha(x,x_0)[(1+r)\nabla h_j(x_0)])+\rho_jd^2(x,x_0)$$

即 $F(x,x_0;\alpha(x,x_0)[(1+r)\sum_{j\in I(x_0)}\mu_j\nabla h_j(x_0)])<0$，与(10)式矛盾。结论得证。　证毕

定理 4　(Kuhn-Tucker 最优性充分条件)若 $x_0\in S$ 是(MFP)的可行解，设存在 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,\cdots,p)$，$(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\neq(0,\cdots,0)$，$\mu_j\geqslant 0(j=1,\cdots,m)$，使得(5)～(7)式在 x_0 成立。若 $f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle$ 和 $-g(\cdot)$ 在 x_0 关于 $\phi_i(i=1,\cdots,p)$ 是高阶 (F,α,ρ,d)-凸；$h_j(j=1,\cdots,m)$ 在 x_0 关于 $\bar{\phi}_j'$ 是高阶 $(F,\bar{\alpha},\rho,\bar{d})$-凸。其中

$$\bar{\phi}_i=rp^{\mathrm{T}}\left(\frac{f_i+w_i}{g_i}\right)(x_0);\bar{\phi}_j'=rp^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0),(r\in\mathbf{R});\bar{\alpha}(x,x_0)=\alpha(x,x_0)\frac{g(x_0)}{g(x)}$$

$$\bar{\phi}(x_0,p)=\left[\frac{1}{g(x_0)}+\frac{f(x_0)+\langle w,x_0\rangle}{g(x_0)^2}\right]\phi(x_0,p)$$

$$\bar{d}(x,x_0)=\left[\frac{1}{g(x)}+\frac{f(x_0)+\langle w,x_0\rangle}{g(x)g(x_0)}\right]^{\frac{1}{2}}d(x,x_0);\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\rho_i+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j\rho_j\geqslant 0$$

则 x_0 是(MFP)的弱有效解。

证明　反设 x_0 不是(MFP)的弱有效解，于是存在 $x\in S$ 使得

$$f_i(x)+\frac{\langle w_i,x\rangle}{g_i(x)}<f_i(x_0)+\frac{\langle w_i,x_0\rangle}{g_i(x_0)},(i=1,\cdots,p)\tag{11}$$

根据 $f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle$ 和 $-g(\cdot)(i=1,\cdots,p)$ 在 x_0 关于 $\phi_i(i=1,\cdots,p)$ 是高阶 (F,α,ρ,d) 凸和定理 1 可得 $\frac{f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle}{g(\cdot)}$ 在 x_0 关于 $\bar{\phi}$ 是高阶 $(F,\bar{\alpha},\rho,\bar{d})$ 凸，有

$$\bar{\alpha}(x,x_0)=\alpha(x,x_0)\frac{g(x_0)}{g(x)},\bar{\phi}(x_0,p)=\left[\frac{1}{g(x_0)}+\frac{f(x_0)+\langle w,x_0\rangle}{g(x_0)^2}\right]\phi(x_0,p)$$

$$\bar{d}(x,x_0)=\frac{1}{g(x)}+\frac{f(x_0)+\langle w,x_0\rangle}{g(x)g(x_0)}]^{\frac{1}{2}}d(x,x_0)$$

由(11)式可得

$$0>f_i(x)+\frac{\langle w_i,x\rangle}{g_i(x)}-f_i(x_0)+\frac{\langle w_i,x_0\rangle}{g_i(x_0)}\geqslant F(x,x_0;\bar{\alpha}(x,x_0)[\nabla\left(\frac{f_i+w_i}{g_i}\right)(x_0)+\nabla_p\bar{\phi}(x_0,p)])+$$
$$\bar{\alpha}(x,x_0)\{\bar{\phi}(x_0,p)-p^{\mathrm{T}}[\nabla_p\bar{\phi}(x_0,p)]\}+\rho_i\bar{d}^2(x,x_0)$$

因为 $\bar{\phi}_i(x_0,p)=rp^{\mathrm{T}}\nabla\left(\frac{f_i+w_i}{g_i}\right)(x_0)$，故 $0>F(x,x_0;\bar{\alpha}(x,x_0)(1+r)\nabla\left(\frac{f_i+w_i}{g_i}\right)(x_0)+\rho_i\bar{d}^2(x,x_0))$，即

$$0>F(x,x_0;\bar{\alpha}(x,x_0)(1+r)\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\nabla\left(\frac{f_i+w_i}{g_i}\right)(x_0)+\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\rho_i\bar{d}^2(x,x_0))\tag{12}$$

又因为 $h_j(j=1,\cdots,m)$ 在 x_0 关于 $\bar{\phi}_j'$ 是高阶 $(F,\bar{\alpha},\rho,\bar{d})$ 凸，且 $\bar{\phi}_j'(x_0,p)=rp^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0),(j=1,\cdots,m)(r\in\mathbf{R})$。得

$$0>F(x,x_0;\bar{\alpha}(x,x_0)(1+r)[\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j\nabla h_j(x_0)]+\sum_{i=1}^{p}\bar{\mu}_j\rho_j\bar{d}^2(x,x_0))\tag{13}$$

联立(12)式和(13)式可得

$$0>F\left(x,x_0;\bar{\alpha}(x,x_0)(1+r)[\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\nabla\left(\frac{f_i+w_i}{g_i}\right)(x_0)+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j\nabla h_j(x_0)]\right)+\left(\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\rho_i+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j\rho_j\right)\bar{d}^2(x,x_0)\geqslant$$
$$F(x,x_0;\bar{\alpha}(x,x_0)(1+r)[\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\nabla\left(\frac{f_i+w_i}{g_i}\right)(x_0)\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j\nabla h_j(x_0)])$$

与(5)式矛盾，所以 x_0 是(MFP)的弱有效解。　证毕

参考文献：

[1] Bector C R, Chandra S, Husain I. Optimality conditions and subdifferentiable multiobjective fractional programming[J]. J Optim Theory Appl, 1993, 79: 105-125.

[2] Liu J C. Optimality and duality for multiobjective fractional programming involving nonsmooth pseudoinvex functions[J]. Optimiza-

tion, 1996, 37: 27-39.

[3] Liu J C. Optimality and duality for multiobjective fractional programming involving nonsmooth (F,ρ)-convex functions[J]. Optimization, 1996, 36: 333-346.

[4] Kuk H, Lee G M, Tanino T. Optimality and duality for nonsmooth multiobjective fractional programming with generalized invexity [J]. J Math Anal Appl, 2001, 262: 365-375.

[5] Liang Z, Huang H, Pardalos P M. Optimality conditions and duality for a class of nonlinear fractional programming problems[J]. J Optim Theory Appl, 2001, 110: 611-619.

[6] Chen X H. Optimality and duality for the multiobjective fractional programming with the generalized (F,ρ)-convexity[J]. J Math Anal Appl, 2002, 273: 190-205.

[7] Preda V. Optimality and duality in fractional multiple objective programming involving semilocally preinvex and related functions [J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 365-382.

[8] Liang Z A, Huang H X, Pardalos P M. Efficient conditions and duality for a class of multiobjective fractional programming[J]. J Glob Optim, 2003, 27: 447-471.

[9] Kim D S, Kim S J, Kim M H. Optimality and duality for a class of non-differentiable multiobjective fractional programming problems[J]. J Optim Theory Appl, 2006, 129: 131-146.

[10] Cristian N. Optimality and duality in multiobjective fractional programming involving-semilocally type I-preinvex and related functions[J]. J Math Anal Appl, 2007, 335: 7-19.

[11] Liu S M, Feng E M. Optimality conditions and duality for a class of nondifferentiable multi-objective fractional programming problems[J]. J Glob Optim, 2007, 38: 653-666.

[12] Chen X H. Sufficient conditions and duality for a class of multiobjective fractional programming problems with higher-order (F,α,ρ,d)-convexity[J]. J Appl Math Comput, 2008, 28: 107-121.

[13] 赵克全，罗杰，唐莉萍. 一类非光滑规划问题的最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2010, 27(2): 1-3.

[14] 王荣波，张庆祥，冯强. 一类非光滑多目标无限规划的最优性条件[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2008, 30(3): 1-5.

[15] 吴至友，彭建文. 关于目标混合型的多目标规划弱非劣解的近似计算方法[J]. 重庆工学院学报, 2000, 14(1): 72-74

Optimality Conditions for a Class of Non-differentiable Multi-objective Fractional Programming Problem

ZHAO Ke-quan, TANG Li-ping

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047)

Abstract: In this paper, optimality conditions are established for a class of nondifferentiable multiobjective fractional programming problem with support function under high-order (F,α,ρ,d)-convexity. Kuhn-Tucker necessary opimality condition of weakly efficient solution is established under strictly high-order (F,α,ρ,d)-convexity of $h_j\,(j=1,2,\cdots,m)$ for (MFP); Kuhn-Tucker sufficient opimality condition is established under high-order (F,α,ρ,d)-convexity of $f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle$、$-g(\cdot)$ and $h_j\,(j=1,2,\cdots,m)$ with respect to ϕ_i for (MFP).

Key words: high-order (F,α,ρ,d)-convexity; non-differentiable multi-objective fractional programming problem; weakly efficient solution; optimality condition

(责任编辑 黄 颖)