

服务率可变且窗口能力不等的 $M/M/n$ 排队模型研究*

侯冬倩,高世泽

(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘要 对于窗口能力不等的多服务窗排队模型,一些研究结果是在各服务窗服务率不变的条件下给出的。为了满足实际生活的需要,本文建立了窗口能力不等且服务率可变的 $M/M/n$ 排队模型,模型假定顾客的到达时间间隔服从参数为 λ 的指数分布,各服务窗对顾客的服务时间分别服从参数为 $\mu_i(k)$ 的指数分布,且与顾客的到达时间间隔相互独立,其中下标 i 表示第 i 个服务窗;不同的是本文还假定每个服务窗的服务率 $\mu_i(k)$ 随系统队长 k (系统中的顾客数)呈分段增长。针对这个模型,文中讨论了在 $n=2$ 的情形下,运用系统的状态转移图列出 K 氏方程的方法,根据定理,若某生灭过程存在平稳分布,则该平稳分布应该满足 K 氏方程和正则性,通过求解 K 氏方程组,结合正则性条件,得到了系统队长的平稳分布。

关键词 排队模型;窗口能力不等;可变服务率;平稳分布

中图分类号 :O226

文献标识码 :A

文章编号 :1672-6693(2010)02-0046-03

在实际生活中,各服务窗的服务能力不仅有差别,有时同一服务窗的服务率也会根据实际情况而发生变化。一般情况,系统中的顾客数越多,服务台就会相应的提高其服务率,于是服务率可变的排队系统便引起了人们的关注。文献[1-3]研究了不同模型中服务率可变的情形,文献[4-7]对可变服务率在排队网络、呼叫中心和交通管理中的应用又分别进行了研究,文献[8]对具有窗口能力不等的 $M/M/n$ 排队模型和具有可变服务率的 $M/M/n$ 排队模型分别进行了研究,而本文综合这两种情况,研究了窗口能力不等且具有可变服务率的 $M/M/n$ 排队模型。本文仅考虑两个服务窗,即 $n=2$ 的情形。

顾客只排成一个队列。记 01 状态表示系统中只有一个顾客且在 2 号窗口接受服务,10 状态表示系统中只有一个顾客且在 1 号窗口接受服务。若两窗口均忙,则系统的服务率为 $\mu(k) = \mu_1(k) + \mu_2(k)$ 。

本文中对 $\mu_1(k)$ 和 $\mu_2(k)$ 为分段常值增长的情形进行讨论,这里假设

$$\mu_1(k) = \begin{cases} \mu_{10} & 0 < k \leq m \\ j\mu_{10} & (j-1)m < k \leq jm \end{cases}$$
$$\mu_2(k) = \begin{cases} \mu_{20} & 0 < k \leq m \\ j\mu_{20} & (j-1)m < k \leq jm \end{cases}$$

其中 $\mu_{10} > 0$, $\mu_{20} > 0$ 为常数。

1 模型假设

本文有如下的模型假设

- 1) 系统有 $n=2$ 个服务窗,容量不限,顾客的到达时间间隔服从参数为 λ 的指数分布;
- 2) 2 个服务窗对顾客的服务时间分别服从参数为 $\mu_1(k)$ 和 $\mu_2(k)$ 的指数分布,且与顾客的到达时间间隔相互独立,其中 k 为系统中的顾客数;当顾客到达系统时,若两窗口均空闲,顾客可任选一窗口请求服务,假设顾客选择 1 号窗的概率为 φ ($0 < \varphi < 1$),则顾客选择 2 号窗的概率为 $1 - \varphi$,且到达系统

2 数学模型

设 $X(t)$ 为时刻 t 系统中的顾客数,则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是以 $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 为状态空间的生灭过程,其中生率 $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 灭率 $\mu(k) = \begin{cases} I_1\mu_{10} + I_2\mu_{20} & k = 1 \\ \mu_1(k) + \mu_2(k) & k \geq 2 \end{cases}$, 这里 $I_1 = \begin{cases} 1 & \text{1号窗忙} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$, $I_2 = \begin{cases} 1 & \text{2号窗忙} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$, 记 $\mu = \mu_{10} + \mu_{20}$ 。那么系统的状态转移如图 1。

* 收稿日期 2009-06-20

作者简介:侯冬倩,女,硕士研究生,研究方向为随机系统分析,通讯作者,高世泽,E-mail: gaoshize@cqnu.edu.cn

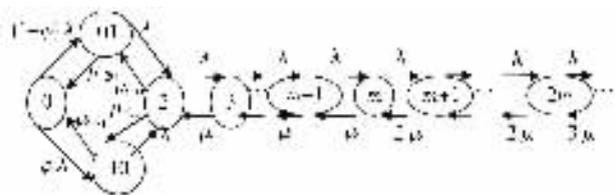


图1 状态转移图

3 平稳分布

定理 记 $P_k(t) = P\{X(t) = k\}$ $P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$,

则 $\{X(t) | t \geq 0\}$ 存在平稳分布

$$P_k = \begin{cases} \rho^{k-1} \alpha P_0 & 0 < k \leq m \\ \frac{1}{2^{k-m}} \rho^{k-1} \alpha P_0 & m < k \leq 2m \\ \left[\frac{1}{(j-1)!} \right]^m \left(\frac{1}{j} \right)^{k-(j-1)m} \rho^{k-1} \alpha P_0 & (j-1)m < k \leq jm, j \geq 3 \end{cases}$$

$$P_0 = \left\{ 1 + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!} \right]^m - \left(\frac{\rho^j}{j!} \right)^m}{j - \rho} \right\}^{-1} \quad (1)$$

其中 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ $\alpha = \frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho+1)\mu_{10}\mu_{20}}$.

证明 由状态转移图可列出在平衡状态下的 K 氏代数方程。

对 0 状态有 $\lambda P_0 = \mu_{10} P_{10} + \mu_{20} P_{01} \quad (2)$

对 01 状态有

$$(1-\varphi)\lambda P_0 + \mu_{10} P_2 = (\mu_{20} + \lambda) P_{01} \quad (3)$$

对 10 状态有 $\varphi\lambda P_0 + \mu_{20} P_2 = (\mu_{10} + \lambda) P_{10} \quad (4)$

对 2 状态有 $\lambda P_{01} + \lambda P_{10} + \mu P_3 = (\mu + \lambda) P_2 \quad (5)$

...

对 $m-1$ 状态有 $\lambda P_{m-2} + \mu P_m = (\lambda + \mu) P_{m-1}$

对 m 状态有 $\lambda P_{m-1} + 2\mu P_{m+1} = (\lambda + \mu) P_m \quad (6)$

对 $2m-1$ 状态有

$$\lambda P_{2m-2} + 2\mu P_{2m} = (\lambda + 2\mu) P_{2m-1}$$

对 $2m$ 状态有 $\lambda P_{2m-1} + 3\mu P_{2m+1} = (\lambda + 2\mu) P_{2m}$

...

由 (3) $\times \mu_{20}$ - (4) $\times \mu_{10}$ 得

$$(1-\varphi)\lambda\mu_{20}P_0 - \varphi\lambda P_0\mu_{10} = (\mu_{20} + \lambda)\mu_{20}P_{01} - (\mu_{10} + \lambda)\mu_{10}P_{10} \quad (7)$$

由 (2) $\times (\lambda + \mu_{10})$ 得

$$(\lambda + \mu_{10})\lambda P_0 = (\lambda + \mu_{10})\mu_{10}P_{10} + (\lambda + \mu_{10})\mu_{20}P_{01} \quad (8)$$

(7)、(8) 两式相加 并注意 $\mu = \mu_{10} + \mu_{20}$ 得

$$(\lambda + \mu - \mu\varphi)\lambda P_0 = (2\lambda + \mu)\mu_{20}P_{01}$$

故解得 $P_{01} = \frac{(\lambda + \mu - \mu\varphi)\lambda P_0}{(2\lambda + \mu)\mu_{20}} = \frac{(\rho + 1 - \varphi)\lambda P_0}{(2\rho + 1)\mu_{20}}$,

其中 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

类似地 将 (7) 式两边乘以 (-1) 得

$$-(1-\varphi)\lambda\mu_{20}P_0 + \varphi\lambda P_0\mu_{10} = -(\mu_{20} + \lambda)\mu_{20}P_{01} + (\mu_{10} + \lambda)\mu_{10}P_{10} \quad (9)$$

由 (2) $\times (\lambda + \mu_{20})$ 得

$$(\lambda + \mu_{20})\lambda P_0 = (\lambda + \mu_{20})\mu_{10}P_{10} + (\lambda + \mu_{20})\mu_{20}P_{01} \quad (10)$$

将 (9)、(10) 两式相加得

$$(\lambda + \mu\varphi)\lambda P_0 = (2\lambda + \mu)\mu_{10}P_{10}$$

解得 $P_{10} = \frac{(\lambda + \mu\varphi)\lambda P_0}{(2\lambda + \mu)\mu_{10}} = \frac{(\rho + \varphi)\lambda P_0}{(2\rho + 1)\mu_{10}}$

从而 $P_1 = P_{10} + P_{01} = \frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}P_0}{(2\rho + 1)\mu_{10}\mu_{20}}$

为简便起见 记 $\frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho + 1)\mu_{10}\mu_{20}} = \alpha$

则 $P_1 = P_{10} + P_{01} = \alpha P_0 \quad (11)$

将 (3)、(4) 式相加 再利用 (2) 和 (11) 式 可得

$$\mu P_2 = \lambda(P_{10} + P_{01}) = \lambda P_1 \quad (12)$$

从而

$$P_2 = \rho P_1 = \rho\alpha P_0$$

将 (12) 式代入 (5) 式 可得 $\mu P_3 = \lambda P_2$ 即

$$P_3 = \rho P_2 = \rho^2 \alpha P_0$$

...

以此类推下去 有 $\mu P_m = \lambda P_{m-1}$ 从而

$$P_m = \rho P_{m-1} = \dots = \rho^{m-1} \alpha P_0$$

又由 (6) 式并注意 $\mu P_m = \lambda P_{m-1}$ 有 $2\mu P_{m+1} =$

$$\lambda P_m \text{ 得 } P_{m+1} = \frac{1}{2}\rho P_m = \dots = \frac{1}{2^m} \rho^m \alpha P_0$$

...

由 $2\mu P_{2m} = \lambda P_{2m-1}$ 得

$$P_{2m} = \frac{1}{2}\rho P_{2m-1} = \dots = \frac{1}{2^m} \rho^{2m-1} \alpha P_0$$

...

最后可得系统平稳分布如下

$$P_k = \begin{cases} \rho^{k-1} \alpha P_0 & 0 < k \leq m \\ \frac{1}{2^{k-m}} \rho^{k-1} \alpha P_0 & m < k \leq 2m \\ \left[\frac{1}{(j-1)!} \right]^m \left(\frac{1}{j} \right)^{k-(j-1)m} \rho^{k-1} \alpha P_0 & (j-1)m < k \leq jm, j \geq 3 \end{cases}$$

由正则性条件 $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ 便可求出 P_0 。事实上 因

为

$$1 = P_0 + \sum_{k=1}^m P_k + \sum_{k=m+1}^{2m} P_k + \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} P_k =$$

$$P_0 + \sum_{k=1}^m \rho^{k-1} \alpha P_0 + \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2^{k-m}} \rho^{k-1} \alpha P_0 +$$

$$\sum_{j=3}^{\infty} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} \left[\frac{1}{(j-1)!} \right]^m \left(\frac{1}{j} \right)^{k-(j-1)m} \rho^{k-1} \alpha P_0 =$$

$$P_0 \left\{ 1 + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!} \right]^m - \left(\frac{\rho^j}{j!} \right)^m}{j - \rho} \right\}$$

$$\text{故 } P_0 = \left\{ 1 + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{\rho^{j-1}}{(j-1)!} \right]^m - \left(\frac{\rho^j}{j!} \right)^m}{j - \rho} \right\}^{-1}$$

4 结论

综上,本文建立了窗口能力不等且服务率为分段常值增长情形的 $M/M/n$ 排队模型,并就 $n=2$ 的情形求出了该模型的平稳分布。对于 $n>2$ 的情形由于表达式复杂、冗长,故这里不再赘述。

参考文献:

- [1] 徐秀丽. 对带启动时间和可变服务率的 $M/M/1$ 休假排队的分析[J]. 应用数学学报, 2008, 31(4): 692-700.
- [2] 朱翼隽, 张峰. 具有两种服务速度的可修 $MX/G/M/M/1$ 排队系统[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2005, 26(5): 417-420.
- [3] 黄仙, 陈圣滔. 经典 $M/G/1$ 排队模型中最优服务率问题探究[J]. 长江大学学报(理工卷), 2006, 3(2): 13-14.
- [4] 李继红, 田乃硕. 服务率可变的批服务排队网络[J]. 运筹与管理, 2006, 15(1): 47-51.
- [5] 朱翼隽, 张继国, 王伟. 基于可变服务率 $M/M/S/K+M$ 可修排队的呼叫中心性能分析[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2006, 27(4): 368-371.
- [6] 张生瑞, 周伟, 李继锐. 一类可变服务率的车辆排队特征分析[J]. 数学的实践与认识, 2000, 30(3): 257-261.
- [7] 冯翼, 罗新民, 邓建国, 等. 呼叫中心排队系统服务率的动态控制方法[J]. 系统工程, 2007, 25(6): 101-105.
- [8] 陆传贵. 排队论[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003: 106-111.

On $M/M/n$ Queueing Model with the Different Ability of the Windows and Changeable Service Rate

HOU Dong-qian, GAO Shi-ze

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: For the queueing model with the different ability of the windows, the findings of some studies are given in the condition that each window's service rate is stable. In order to meet the needs of real life, Queueing Model in this paper is established with the situation that the abilities between the windows are different and the service rate is changeable. Given that the interval of customers' arrival time obeys the exponential distribution with parameter m , the service time of various service windows obeys the exponential distribution with parameter $\mu_i(k)$ where the subscript i represents the first i -service window and is mutually independent with the interval of customer's arrival time; The difference is that the service rate $\mu_i(k)$ shows changes in the law of sub-growth with the system size k (the number of the customers in the system). In view of this model, in the case of $n=2$, get K 's equations by the state transition graph. According to the theorem, if a steady distribution of a birth-death process exists, the steady distribution should satisfy K 's equation and the regularity. When we solve them, we finally find the steady distribution of the system size.

Key words: queueing model; different ability of the windows; changeable service rate; the smooth distribution

(责任编辑 黄颖)