

不同复混沌系统的修正函数投影同步*

张学兵¹, 赵洪涌²

(1. 淮安信息职业技术学院, 江苏 淮安 223003; 2. 南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

摘要:对一个新的复混沌系统和复混沌吕系统,通过 Matlab 软件画出 2 个复系统的混沌吸引子图像,以新的复混沌系统作为驱动系统,复混沌吕系统作为响应系统,构造同步系统,在参数未知的情况下通过设计非线性控制器和参数自适应律实现了两个不同的复混沌系统的修正函数投影同步,构造 Lyapunov 函数,基于 Lyapunov 稳定性理论,应用 Lyapunov 第二方法,从理论上证明了该方法的有效性;通过 Matlab 软件对同步系统进行数值仿真,仿真结果显示在控制器和参数自适应律的作用下,两个系统在 5 s 内就能同步,仿真结果进一步验证了该方法的有效性和可行性。

关键词:复混沌系统;修正函数投影同步;自适应控制

中图分类号:TP27;O415.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2013)02-0065-04

自从 Pecora 和 Carroll^[1]首先提出并实现了混沌系统的驱动响应同步以来,由于它在通信保密等领域的潜在应用价值,受到了人们的广泛关注;同时,各种同步方案相继提出,如完全同步、反同步、相同步、滞后同步、广义同步、投影同步、修正函数投影同步等^[2-12]。混沌同步研究逐步成为非线性科学研究热点之一。这些研究主要集中在研究相同结构的混沌系统间的同步,且状态变量都是实数形式。而复数形式的混沌系统的同步研究相对较少,近年来 Gamal M. Mahmoud 等人做了很多这方面的工作^[13-16],朱红兰等人也研究了一个新的复混沌系统并实现了其同步^[17]。

本文在参数未知的情况下研究两个不同复混沌系统的修正函数投影同步,然后通过理论与数值仿真验证方法的有效性。

1 系统描述

最近朱红兰等人研究了一个新的复混沌系统^[17],系统的方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) - yz \\ \dot{y} = cx - y - xz \\ \dot{z} = 1/2(\bar{x}y + x\bar{y}) - bz \end{cases} \quad (1)$$

复混沌吕系统^[18]的方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = -xz + \beta y \\ \dot{z} = 1/2(\bar{x}y + x\bar{y}) - \gamma z \end{cases} \quad (2)$$

(1)、(2)式中 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 为系统参数, $x = u_1 + iu_2, y = u_3 + iu_4$ 是复变量, $i = \sqrt{-1}, z = u_5$ 是实变量, \bar{x}, \bar{y} 分别表示 x, y 的共轭函数。

当参数 $a=35, b=10, c=25$ 时,新的复混沌系统(1)处于混沌状态,混沌吸引子如图 1 所示。对于复混沌吕系统(2),当参数 $\alpha=29, \beta=21, \gamma=1$ 时,系统处于混沌状态,混沌吸引子如图 2 所示。

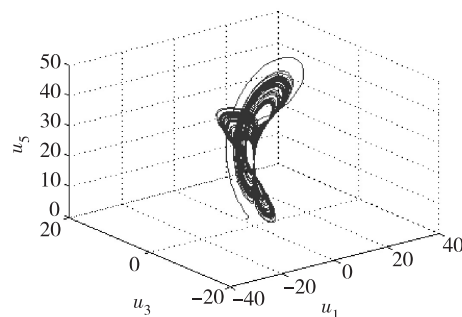


图1 新复混沌系统的混沌吸引子

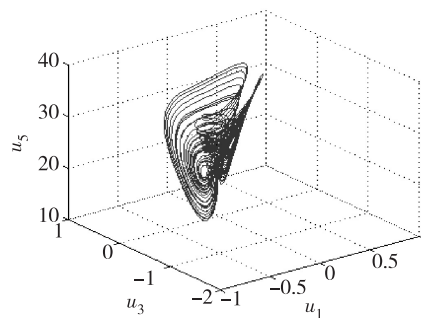


图2 复混沌吕系统的吸引子

* 收稿日期:2012-05-18 修回日期:2012-08-26 网络出版时间:2013-03-16 13:37

资助项目:国家自然科学基金(No. 61174155)

作者简介:张学兵,男,硕士,讲师,研究方向为非线性分析、控制与同步,E-mail:zxb1030@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.65_016.html

2 两个复混沌系统的修正函数投影同步

本节讨论两个复混沌系统的修正函数投影同步,以新复混沌系统作为驱动系统,复混沌吕系统作为响应系统,驱动和响应系统分别表示如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) - y_1 z_1 \\ \dot{y}_1 = cx_1 - y_1 - x_1 z_1 \\ \dot{z}_1 = 1/2(\bar{x}_1 y_1 + x_1 \bar{y}_1) - bz_1 \end{cases} \quad (3)$$

其中, $x_1 = u_{11} + iu_{21}$, $y_1 = u_{31} + iu_{41}$ 是复变量, $z_1 = u_{51}$ 为实变量。响应系统的形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \alpha(y_2 - x_2) + (v_1 + iv_2) \\ \dot{y}_2 = -x_2 z_2 + \beta y_2 + (v_3 + iv_4) \\ \dot{z}_2 = 1/2(\bar{x}_2 y_2 + x_2 \bar{y}_2) - \gamma z_2 + v_5 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $x_2 = u_{12} + iu_{22}$, $y_2 = u_{32} + iu_{42}$, $z_2 = u_{52}$, $v_1 + iv_2$, $v_3 + iv_4$, v_5 是待设计的控制器,控制驱动系统和响应系统的同步。

为了确定待设计的控制器,定义误差状态变量

$$\begin{cases} e_{u_1} + ie_{u_2} = x_1 - m_1(t)x_2 = \\ \quad u_{11} - m_1(t)u_{12} + i(u_{21} - m_1(t)u_{22}) \\ e_{u_3} + ie_{u_4} = y_1 - m_2(t)y_2 = \\ \quad u_{31} - m_2(t)u_{32} + i(u_{41} - m_2(t)u_{42}) \\ e_{u_5} = z_1 - m_3(t)z_2 = u_{51} - m_3(t)u_{52} \end{cases}$$

其中, $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t) \neq 0$, 是关于 t 的函数,现在的目标是设计合适的自适应控制器,使得响应系统(4)能够全局渐近修正函数投影同步驱动系统(3),即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{u_1} + ie_{u_2}\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{u_3} + ie_{u_4}\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{u_5}\| = 0$ 。

由(3)式和(4)式,可以得到误差动态方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_{u_1} + i\dot{e}_{u_2} = a(u_{31} - u_{11}) + u_{31}u_{51} - \dot{m}_1(t)u_{12} - \\ \quad m_1(t)(\alpha(u_{32} - u_{12}) + v_1) + \\ \quad i(a(u_{41} - u_{21}) + u_{41}u_{51} + v_2 - \\ \quad \dot{m}_1(t)u_{22} - m_1(t)(\alpha(u_{42} - u_{22}) + v_2)) \\ \dot{e}_{u_3} + i\dot{e}_{u_4} = cu_{11} - u_{31} - u_{11}u_{51} - \dot{m}_2(t)u_{12} - \\ \quad m_2(t)(\beta u_{32} - u_{12}u_{52} + v_3) + \\ \quad i(cu_{21} - u_{41} - u_{21}u_{51} - \dot{m}_2(t)u_{22} - \\ \quad m_2(t)(\beta u_{42} - u_{22}u_{52} + v_4)) \\ \dot{e}_{u_5} = u_{11}u_{31} + u_{21}u_{41} - bu_{51} - \dot{m}_3(t)u_{52} - \\ \quad m_3(t)(u_{12}u_{32} - \gamma u_{52} + v_5) \end{cases}$$

对误差系统进行虚实部分离,误差系统可转化为(5)式的形式。

现在的目标就是设计合适的控制器使得误差系统(5)在零点是一致渐近稳定的。设计(6)式的非线性控制器。

$$\begin{cases} \dot{e}_{u_1} = a(u_{31} - u_{11}) + u_{31}u_{51} - \dot{m}_1(t)u_{12} - \\ \quad m_1(t)(\alpha(u_{32} - u_{12}) + v_1) \\ \dot{e}_{u_2} = a(u_{41} - u_{21}) + u_{41}u_{51} + v_2 - \dot{m}_1(t)u_{22} - \\ \quad m_1(t)(\alpha(u_{42} - u_{22}) + v_2) \\ \dot{e}_{u_3} = cu_{11} - u_{31} - u_{11}u_{51} - \dot{m}_2(t)u_{12} - \\ \quad m_2(t)(\beta u_{32} - u_{12}u_{52} + v_3) \\ \dot{e}_{u_4} = cu_{21} - u_{41} - u_{21}u_{51} - \dot{m}_2(t)u_{22} - \\ \quad m_2(t)(\beta u_{42} - u_{22}u_{52} + v_4) \\ \dot{e}_{u_5} = u_{11}u_{31} + u_{21}u_{41} - bu_{51} - \dot{m}_3(t)u_{52} - \\ \quad m_3(t)(u_{12}u_{32} - \gamma u_{52} + v_5) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{m_1(t)}[a_1(u_{31} - u_{11}) - m_1(t)\alpha_1(u_{32} - \\ \quad u_{12}) + k_1 e_{u_1} - \dot{m}_1(t)u_{12} + u_{31}u_{51}] \\ v_2 = \frac{1}{m_1(t)}[a_1(u_{41} - u_{21}) - m_1(t)\alpha_1(u_{42} - \\ \quad u_{22}) + k_2 e_{u_2} - \dot{m}_1(t)u_{22} + u_{41}u_{51}] \\ v_3 = \frac{1}{m_2(t)}[c_1 u_{11} - m_2(t)(\beta_1 u_{32} + u_{12}u_{52}) - \\ \quad u_{31} - u_{11}u_{51} + k_3 e_{u_3} - \dot{m}_2(t)u_{12}] \\ v_4 = \frac{1}{m_2(t)}[c_1 u_{21} - m_2(t)(\beta_1 u_{42} + u_{22}u_{52}) - \\ \quad u_{41} - u_{21}u_{51} + k_4 e_{u_4} - \dot{m}_2(t)u_{22}] \\ v_5 = \frac{1}{m_3(t)}[-b_1 u_{51} - m_3(t)(\gamma_1 u_{52} - u_{12}u_{32}) - \\ \quad u_{42}u_{22}) + u_{21}u_{41} + u_{11}u_{31} + k_5 e_{u_5} - \dot{m}_3(t)u_{52}] \end{cases} \quad (6)$$

参数自适应律为

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = (u_{31} - u_{11})e_{u_1} + (u_{41} - u_{21})e_{u_2} \\ \dot{b}_1 = -u_{51}e_{u_5} \\ \dot{c}_1 = u_{11}e_{u_3} + u_{21}e_{u_4} \\ \dot{\alpha}_1 = (u_{12} - u_{32})m_1(t)e_{u_1} + (u_{42} - u_{22})m_2(t)e_{u_2} \\ \dot{\beta}_1 = -m_2(t)u_{32}e_{u_3} - m_2(t)u_{42}e_{u_4} \\ \dot{\gamma}_1 = m_3(t)u_{52}e_{u_5} \end{cases} \quad (7)$$

其中, k_i 是正的反馈增益。 $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, d_1$ 是对参数 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 的估计。

定理 对于任意给定的函数 $m_i(t) (i=1, 2, 3)$, 在非线形控制器(6)和参数自适应律(7)的作用下,可实现驱动系统(3)和响应系统(4)的修正函数投影同步。

证明 选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}(e_{u_1}^2 + e_{u_2}^2 + e_{u_3}^2 + e_{u_4}^2 + e_{u_5}^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_\alpha^2 + e_\beta^2 + e_\gamma^2)$$

其中, $e_a = a_1 - a$, $e_b = b_1 - b$, $e_c = c_1 - c$, $e_\alpha = \alpha_1 - \alpha$, $e_\beta = \beta_1 - \beta$, $e_\gamma = \gamma_1 - \gamma$, 将其沿(5)式求导,并将控制器(6)和参数自适应律(7)代入,得

$$\begin{aligned}\dot{V} = & e_{u_1} \dot{e}_{u_1} + e_{u_2} \dot{e}_{u_2} + e_{u_3} \dot{e}_{u_3} + e_{u_4} \dot{e}_{u_4} + e_{u_5} \dot{e}_{u_5} + \\ & e_a \dot{e}_a + e_b \dot{e}_b + e_c \dot{e}_c + e_\alpha \dot{e}_\alpha + e_\beta \dot{e}_\beta + e_\gamma \dot{e}_\gamma = \\ & -k_1 e_{u_1}^2 - k_2 e_{u_2}^2 - k_3 e_{u_3}^2 - k_4 e_{u_4}^2 - k_5 e_{u_5}^2 = -e^T P e\end{aligned}$$

其中, $e = (e_{u_1}, e_{u_2}, e_{u_3}, e_{u_4}, e_{u_5}, e_a, e_b, e_c, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)^T$, $P = \text{diag}[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, 则 P 是正定的, 因此 \dot{V} 是半负定的, 但不能立即得到误差系统(5)是渐近稳定的。

实际上, $\dot{V} \leq 0$, 因此 $e_{u_1}, e_{u_2}, e_{u_3}, e_{u_4}, e_{u_5}, e_a, e_b, e_c, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma \in L_\infty$, 从误差系统可知 $\dot{e}_{u_1}, \dot{e}_{u_2}, \dot{e}_{u_3}, \dot{e}_{u_4}, \dot{e}_{u_5} \in L_\infty$ 。因为 $\dot{V} = -e^T P e$, 所以有

$$\int_0^t \lambda_{\min}(P) \|e\|^2 dt \leq \int_0^t e^T P e dt \leq \int_0^t -\dot{V} dt = V(0) - V(t) \leq V(0)$$

其中, $\lambda_{\min}(P)$ 是正定有界矩阵 P 的最小特征值, 因为 $e_{u_1}, e_{u_2}, e_{u_3}, e_{u_4}, e_{u_5} \in L_2$, 根据 Barablat 引理有 $(e_{u_1}, e_{u_2}, e_{u_3}, e_{u_4}, e_{u_5}) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\|e(t)\| = 0$, 因此驱动系统(3)和响应系统(4)是同步的。证毕

3 数值仿真

用 MATLAB 对同步系统进行仿真, 采用 Runge-Kutta45 算法, 取步长为 0.01。反馈增益 $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$, 驱动系统(4)的参数 a, b, c 分别取为 35、10、25, 响应系统的参数 α, β, γ 分别取为 29、21、1, 此时驱动系统与响应系统都处于混沌状态。初始值 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0.1 + 0.1i, 0.01 + 0.2i, 0.3)$, 响应系统(5)的初始值可以任意选取, 不妨取为 $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0.2 + 0.2i, 0.02 + 0.3i, 0.4)$, 参数的估计的初始值不妨取为 $a_1(0) = 0, b_1(0) = 0, c_1(0) = 0, \alpha_1(0) = 0, \beta_1(0) = 0, \gamma_1(0) = 0, d_1(0) = 0$, 令 $m_1(t) = 3\sin(\frac{\pi t}{5}), m_2(t) = 20 + 4\sin(\frac{\pi t}{5}), m_3(t) = 30 + 5\sin(\frac{\pi t}{5})$, 同步效果如图 3、图 4 所示。

从图 3 中可以看出响应系统(4)和驱动系统(3)很快达到同步, 说明设计的控制器是快速有效的, 从图 4 中可以看出随着时间的变化参数自适应律很快将未知参数估计至真值。

4 结论

本文在参数未知的情况下通过设计自适应控制器和参数自适应律, 实现了两个不同复混沌系统的修正函数投影同步, 从理论上予以证明, 并通过数值仿真的方法进行了验证, 所设计的参数更新规则可将未知参数估计至真值。鉴于修正函数投影同步的特点, 将其应用到混沌保密通讯中, 具有更强的保密性。

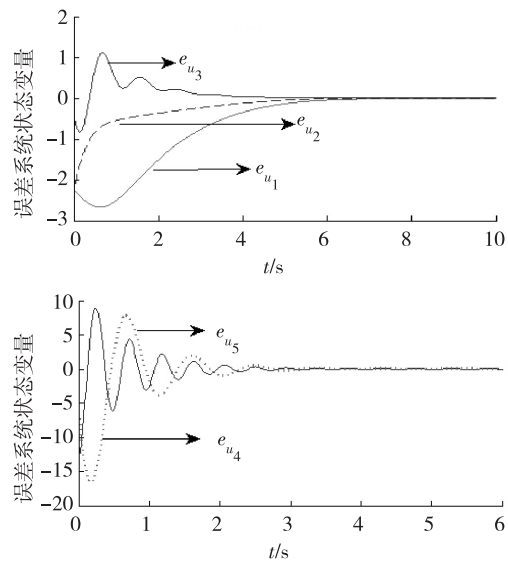


图3 驱动系统与响应系统的同步误差曲线

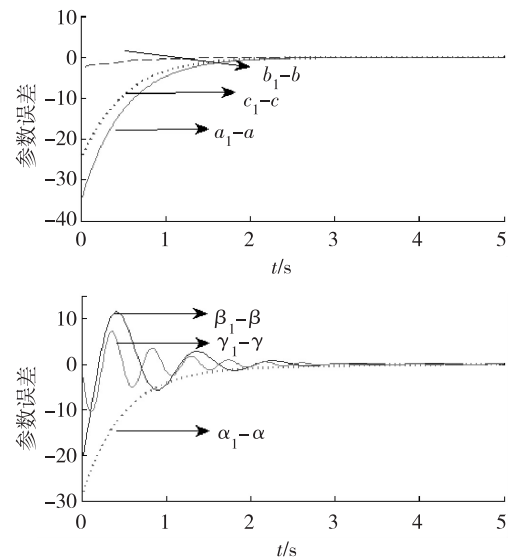


图4 参数估计的误差曲线

参考文献:

- [1] Pecora L, Carroll T. Synchronization in chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Wang Y W, Guan Z H. Generalized synchronization of continuous chaotic system [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27: 97-101.
- [3] Santoboni G, Pogromsky A Y, Nijmeijer H. An observer for phase synchronization of chaos [J]. Physics Letters A, 2001, 291: 265-273.
- [4] Li C, Liao X, Wong K. Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communications [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 183-193.
- [5] 王立明. 不确定扰动情况下耦合 Duffing 混沌系统的广义投影同步的神经滑模控制 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2011, 34(3): 345-351.

- Wang L M. Neural sliding mode control for generalized projection synchronization of the coupled duffing chaotic system with uncertain perturbation[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2011, 34(3): 345-351.
- [6] 薛志远, 杨春德. 利用反馈控制实现不同混沌(超混沌)系统之间的同步[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 34(2): 153-157.
- Xue Z Y, Yang C D. Synchronization between different chaotic(hyperchaotic) systems via feedback control[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition, 2009, 34(2): 153-157.
- [7] 薛志远, 沈世云. 异结构混沌系统之间的统一同步方法[J]. 重庆理工大学学报: 自然科学版, 2010, 24(5): 75-80.
- Xue Z Y, Shen S Y. A unified approach for synchronization between different chaotic systems[J]. Journal of Chongqing University of Technology: Natural Science, 2010, 24(5): 75-80.
- [8] 张学兵. 一个新混沌系统的分析与控制[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2012, 29(2): 55-59.
- Zhang X B. Analysis and control of a new chaotic system [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(2): 55-59.
- [9] Du H, Zeng Q, Wang C. Function projective synchronization of different chaotic systems with uncertain parameters[J]. Phys Lett A, 2008, 372: 5402-5410.
- [10] Luo R Z, W Z M. Adaptive function projective synchronization of unified chaotic systems with uncertain parameters[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2009, 42: 1266-1272.
- [11] Sudheer K S, Sabir M. Adaptive function projective synchronization of two-cell quantum-cnn chaotic oscillators with uncertain parameters[J]. Phys Lett A, 2009, 373: 1847-1851.
- [12] Du H, Zeng Q, Wang C. Modified function projective synchronization of chaotic system[J]. Chaos Solution & Fractals, 2009, 42: 2399-2404.
- [13] Mahmoud G M, tassos Bountis. The dynamics of systems of complex nonlinear oscillators: a review[J]. I J Bifurcation and Chaos, 2004, 14 (11): 3821-3846.
- [14] Mahmoud G M, Ahmed M E, Sabor N. On autonomous and nonautonomous modified hyperchaotic complex lü systems[J]. I J Bifurcation and Chaos, 2011(7), 21: 1913-1926.
- [15] Mahmoud G M, Mahmoud E E. Synchronization and control of hyperchaotic complex lorenz system[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2010, 80 (12): 2286-2296.
- [16] Mahmoud G M, Bountis T, Mahmoud E M. Active control and global synchronization of the complex chen and lü systems[J]. I J Bifurcation and Chaos, 2007, 17(12): 4295-4308.
- [17] 朱红兰, 张学兵. 一个新的复混沌系统的动力学特性及其同步[J]. 动力学与控制学报, 2008, 6(4): 307-311.
- Zhu H G, Zhang X B. Dynamical analysis of a new complex chaotic system and its synchronization[J]. Journal of Dynamics and Control 2008, 6(4): 307-311.
- [18] Mahmoud G M, Aaly S, AL-Kashif M A. Dynamical properties and chaos synchronization of a new chaotic complex nonlinear system[J]. Nonlinear Dynamics, 2008, 51: 171-181.

Adaptive Modified Function Projective Synchronization of Different Chaotic Complex Systems

ZHANG Xue-bing¹, ZHAO Hong-yong²

(1. Huai'an College of Information Technology, Huai'an Jiangsu 223003;

2. Dept. of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

Abstract: In this paper, the chaotic attractors of the new complex chaotic system and the complex chaotic lü system are given through the Matlab software. Then in order to observe the MFPS synchronization behavior between two complex chaotic systems we assume that the new chaotic complex system drives the chaotic complex Lü system. Based on the Lyapunov stability theorem and adaptive control method, adaptive controllers and parameters update laws can be presented for the MFPS between two different complex systems with fully unknown parameters. Numerical simulations are presented to show the effectiveness of the proposed synchronization schemes.

Key words: complex chaotic system; modified function projective synchronization (MFPS); adaptive control

(责任编辑 欧红叶)