

排序论基本概念综述*

唐国春

(上海第二工业大学 经济管理学院, 上海 201209)

摘要:第二次世界大战期间运筹学(Operations research)兴起,首次把运作(Operation)作为研究对象。研究运作的时间安排又促成排序(Scheduling)概念的建立和研究的开展。经过50多年的发展,国内排序术语正在逐步走向统一,这是学科正在成熟的标志,也是学术交流的需要。王元院士等于2010年8月编辑出版的《数学大辞典》是一部综合性的数学大辞典,目前正在修订出版第2版。中国运筹学会排序专业委员会(排序分会)组织34位专家执笔和审阅了39条排序论最基本的概念,供入选《数学大辞典》第2版用。本文综述了这39条排序论最基本的概念,旨在征求意见,为以后编辑出版完整的《排序论辞典》奠定基础。

关键词:运筹学;排序;综述

中图分类号:O221.7

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2012)04-0001-11

1 背景介绍

第二次世界大战期间运筹学(Operations research)兴起,首次把运作(Operation)作为研究对象。其间,研究运作的时间安排促成排序(Scheduling)概念的建立和研究的开展。在20世纪中叶运筹学奠基时期,排序论的先驱工作已经在离散优化领域占有重要地位。此后,排序论始终保持蓬勃发展的势态。

20世纪60年代越民义就注意到排序(Scheduling)问题的重要性和在理论上的难度。1960年他编写国内第一本排序理论讲义。70年代初他和韩继业研究同顺序流水作业排序问题,开创中国研究排序论的先河^[1]。在他们两位的倡导和带动下国内排序的理论研究和应用研究有较大的发展。国内最早把scheduling译为调度是在1983年^[2]。正如国际上著名scheduling专家Potts等指出:“排序论的进展是巨大的。这些进展得益于研究人员从不同的学科(例如,数学、运筹学、管理科学、计算机科学、工程学和经济学)所做出的贡献。排序论已经成熟,有许多理论和方法可以处理问题;排序论也是丰富的(例如,有确定性或者随机性的模型、精确的或者近

似的解法、面向应用的或者基于理论的)。尽管排序论取得了进展,但是在这个令人兴奋并且值得研究的领域,许多挑战仍然存在”^[3]。经过50多年的发展,国内排序(调度)术语正在逐步走向统一。这是学科正在成熟的标志,也是学术交流的需要。

在最优化理论和应用中把“scheduling”、“排序”、“调度”这三者视为涵义完全相同,完全可以相互替代的3个中英文词汇,只不过是这三者使用的场合(英语、运筹学、自动化)不同而已^[4]。这时,不要把“排序”理解为“安排次序”,不是“sequencing”,而要理解为“scheduling”。类似地,也不要“调度”理解为“调整速度”或者“调剂力度”,而要理解为“scheduling”。因此,可以把“sequencing”译成“安排次序”。但是,这并不意味着“排序”就是“sequencing”。“scheduling”作为英语“schedule”的动名词,是包含“动作”的,所以,把“scheduling”译成“安排时间表”,或者“排时”,也是可以的;还有把“scheduling”译成“排程”或者其他^[5]。考虑到在数学和运筹学中50多年来使用的习惯,赞同把“scheduling”译成“排序”。也尊重自动化学科从上个世纪80年代就在使用“调度”的译法。所以,提倡用“排序”和“调度”作为“scheduling”的中文译名。苏步青院士

* 收稿日期:2012-03-06 网络出版时间:2012-07-04 11:15:00

资助项目:国家自然科学基金(No. 70731160015; No. 20710015)

作者简介:唐国春,男,教授,博士生导师,研究方向为排序论。

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120704.1115.201204.1_001.html

曾为排序专业委员会(排序分会)题签“排序通讯”和“排序论学报”,激励大家学习和研究排序论^[6]。

1974年 Baker 定义:“Scheduling is the allocation of resources over time to perform a collection of tasks”^[7],即 scheduling 是为完成若干项任务而对资源(指包括 machine 在内的各种资源)按时间进行分配。接着, Baker 指出:“Scheduling is a decision making function. Solving a scheduling problem amounts to answering two kinds of questions: 1. Which resources will be allocated to perform each task? 2. When will each task be performed?” Pinedo 在著名的《Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems》一书中提出几乎相同的定义。“Scheduling deals with the allocation of scarce resources to tasks over time. It is a decision making process with the goal of optimizing one or more objectives”^[8]。因而,按时间分配任务和资源是 scheduling 很本质的特征。

Baker 指出:“排序领域内许多早期的工作是在制造业推动下发展起来的,所以在描述排序问题时会很自然地使用制造业的术语。虽然排序问题在许多非制造业的领域内取得了相当有意义的成果,但是制造业的术语仍然经常在使用。因而,往往把资源(Resources)称为机器(Machines),把任务(Tasks)称为工件(Jobs)。有时工件可能是由几个先后次序约束相互联系着的基本任务(Elementary tasks)所组成。这种基本任务称为工序(Operations)。例如,对门诊病人到医疗诊所看病的排序问题也描述成为‘工件’在‘机器’上‘加工’的过程”^[6]。排序论中的“机器”和“工件”已经不是机器制造业中的“车床”和“车床加工的螺丝”,已经从“车床”和“螺丝”等具体事物中抽象出来,是抽象的代表性概念。正好比“水果”是从“香蕉”、“苹果”等具体事物中抽象出来,是抽象的代表性概念一样。排序论中的“机器”可以是数控机床、计算机 CPU(中央处理器)、医生、机场跑道等,“工件”可以是零件、计算机终端、病人、降落的飞机等。例如,计算机科学中并行计算机的出现,促进排序论中对平行机(Parallel machine)的深入研究;反过来,排序论中的平行机可以应用到具体的计算机科学的并行计算机中去,平行机排序的成果在一定程度上推动并行计算机的发展^[4]。

2010年8月王元院士等编辑出版《数学大辞

典》。这是一部综合性的数学大辞典,涵盖数理逻辑与数学基础、数论、代数学、分析学、复分析、常微分方程、动力系统、偏微分方程、泛函分析、组合数学、图论、几何学、拓扑学、微分几何、概率论、数理统计、计算数学、控制论、信息论、运筹学等学科,以常用、基础和重要的名词术语为基本内容,提供简短扼要的定义或概念解释,并有适度展开。最近《数学大辞典》运筹学部分主编章祥荪教授提出:“数学大辞典目前正在进行修改,以便在一年后出版第2版。第1版中对排序的确反映不够,可以考虑在新版中加以改进。其他有些分支也有同样的问题,正在改进。辞典的定位是大学本科的读者,因此条目的选择要有普遍性,不要太细的学术展开。”为此,中国运筹学会排序专业委员会(排序分会)组织34位专家执笔和审阅39条排序论最基本的条目,供入选《数学大辞典》第2版用。笔者在此文中综述了这39条排序论最基本概念,旨在公开征求意见,为以后编辑出版完整的《排序论辞典》奠定基础。

在《数学大辞典》和《排序论辞典》中“排序”默认的涵义是“scheduling”,而且是指“机器排序(Machine scheduling)”,sequencing 是译成“安排次序”。在《排序论辞典》也介绍“项目排序”中最基础的条目,但是不会涉及计算机科学中关于“数据排序(Data sorting)”,如冒泡排序等条目。在《数学大辞典》和《排序论辞典》中把所有的“scheduling”涵义的“调度”都改为“排序”。同样,以后在《自动化辞典》和《调度论辞典》中,可以把所有的“scheduling”涵义的“排序”都改为“调度”,因为“排序”与“调度”在最优化理论和应用中完全可以相互替代。

2 排序论基本概念条目

排序(Scheduling) 是为加工若干个工作件或者完成若干项任务(Task)而对资源(包括机器(Machine)或者处理机(Processor)在内的各种资源)按时间进行高效率的分配;在自动化学科中称为调度;在最优化理论和应用中是指机器排序(Machine scheduling),以区别项目排序(Project scheduling)和数据排序(Data sorting)。排序问题分为经典排序和现代排序。

(执笔:唐国春 校阅:韩继业)

排序三参数表示(Three-field notation of scheduling) 1967年 Conway, Maxwell 和 Miller 提出用

4个参数表示排序问题。1979年Graham, Lawler和Kinnooy Kan改用三参数 $\alpha|\beta|\gamma$ 来表示,其中 α 表示机器环境(Machine environment),比如1表示单台机器, P 表示同型机, Q 表示同类机; β 表示工件特性(Job characteristics),比如 r_j 表示工件的就绪时间可以不相同, on-line表示在线排序, $pmtn$ 表示加工允许中断; γ 表示目标函数,比如 C_{\max} 表示最大完工时间(Makespan), $\sum C_j$ 表示总完工时间, $\sum \omega_j C_j$ 表示带权总完工时间。例如: $Pm|pmtn, r_j|\sum C_j$ 表示 m 台同型机、工件的就绪时间可以不相同、加工允许中断、优化的目标是使总完工时间为最小的排序问题。

(执笔:张玉忠 校阅:唐国春)

机器(Machine) 是加工工件或者是完成任务所需要的资源;也有称为处理机(Processor)。机器可以分成两大类:通用平行(Parallel)机和专用串联(Dedicated)机。对于加工不允许中断的情况,工件在 m 台平行机上的加工是只需要在这 m 台机器中的任何一台机器上加工一次;工件在 m 台串联机上的加工是需要在这 m 台机器中的每一台机器上都加工一次。平行机分成3类:同型机、同类机和非同类机;串联机也分为3类:流水作业、自由作业和异序作业。

(执笔:张玉忠 校阅:唐国春)

工件(Job) 是被加工的对象,或者是要完成的任务。对于 n 个工件在 m 台串联机上加工不允许中断的情况,工件 J_j 在机器 M_i 上的一次加工称为一个工序(Operation),记为 O_{ij} 。加工时间(Processing time)、服务时间(Service time)或执行时间(Execution time)是指工件 J_j 在机器 M_i 上加工所需的(非负的)时间,可以用 p_{ij} 来表示。就绪时间、到达时间(Arrival time)、准备时间(Ready time)或释放(放行)时间(Release time)是指工件 J_j 可以开始加工的时间,可以用 r_j 来表示。如果所有的工件都同时就绪,可以认为 $r_j=0$ ($j=1, \dots, n$)。交货期(Due date) d_j 表示工件 J_j 的所有工序的加工都应该结束的时刻。权(Weight) ω_j 表示工件 J_j 的重要性。在机器和工件的一种安排下,对应于一张时间表(Schedule)的输出数据有完工时间(Completion time) C_j ,是工件 J_j 的最后一道工序实际结束加工

的时刻;运行时间(Flow time) $F_j=C_j-r_j$;延迟(Lateness) $L_j=C_j-d_j$;延误(Tardiness) $T_j=\max\{L_j, 0\}$;提前(Earliness) $E_j=\max\{-L_j, 0\}$ 等。

(执笔:张玉忠 校阅:唐国春)

误工计数(Unit penalty) 如果工件 J_j 的完工时间 C_j 大于该工件的交货期 d_j ,那么该工件称为是误工的;否则,称为不误工。通常用 U_j 表示误工计数。如果 $C_j \leq d_j$,那么 $U_j=0$;如果 $C_j > d_j$,那么 $U_j=1$ 。从而,误工的工件的个数(简称为误工工件数) $N_T = \sum U_j$ 。在赋予工件的权 ω_j 适当的物理量纲后 $\omega_j U_j$ 可以看成是一次误工(不管误工时间的长短)造成的损失; $\sum \omega_j U_j$ 又可以称为带权误工工件数。

(执笔:沈灏 校阅:唐国春)

经典排序(Classical scheduling) 1993年Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan和Shmoys等在“Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity”一文中提出经典排序有4个基本假设:1)资源的类型。机器是加工工件所需要的一种资源。经典排序假设,一台机器在任何时刻最多只能加工一个工件;同时还假设,一个工件在任何时刻至多在一台机器上加工。2)确定性。经典排序假设决定排序问题的一个实例的所有(输入)参数都是事先知道的和完全确定的。3)可运算性。经典排序是在可以运算的层面上研究排序问题,而不去顾及诸如如何确定工件的交货期,如何购置机器和配备设备等技术上可能发生的问题。4)单目标和正则性。经典排序假设排序的目的是使衡量排序好坏的单个目标函数的函数值为最小,而且这个目标函数是工件完工时间的非降函数。这就是所谓正则目标。

(执笔:唐国春 校阅:韩继业)

现代排序(Modern scheduling) 现代排序或新型排序(New classes of scheduling problems)是Brucker和Knust在“Complexity results of scheduling problems”(见<http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class/>)中提出的,是相对于经典排序而言,其特征是突破经典排序的基本假设。作为经典排序关于资源的类型基本假设的突破,有成组分批排序、同时加工排序、不同时开工排序和资源受限排序等。作为经典排序确定性基本

假设的突破,有可控排序、随机排序、模糊排序和在线排序等。作为经典排序可运算性基本假设的突破,考虑实际应用中有关的情况和因素,就是应用排序(Applied scheduling)问题。如人员排序(Employee scheduling)和智能排序(Intelligent scheduling)等。作为经典排序单目标和正则性基本假设的突破,有多目标排序、准时排序和窗时排序等。这 10 种经过推广的排序(可控排序、成组分批排序、在线排序、同时加工排序、准时排序和窗时排序、不同时开工排序、资源受限排序、随机排序、模糊排序、多目标排序等)构成现代排序论的主要内容。新型排序还有 Scheduling with transportation (communication) delays(带有传输时间的排序)、Scheduling multiprocessor jobs(多台机器同时加工工件的排序)等。

(执笔:唐国春 校阅:韩继业)

多代理竞争排序(Competitive multi-agent scheduling) 在多代理竞争排序问题中,全部工件分为 K 个类,每一类由一个代理(Agent)负责。这些代理竞争公共的资源(即利用相同的机器集合加工工件),某代理负责的工件的约束条件和使用的目标函数可以与其他代理负责的工件的约束条件和使用的目标函数不同。假设 f^j 是代理 j 的目标函数,优化的目标有 3 类:1)同时优化所有代理的目标函数(寻求问题的帕累托(Pareto)最优解,属多目标优化问题);2)优化带权求和型的目标函数 $\sum \alpha_j f^j$;3)约束优化,排序的目标函数为 $\min(f^{j1}, \dots, f^{jk})$ subject to $(f^{l1} \leq Q_1, f^{ls} \leq Q_s)$,其中 Q_s 是对代理 s 事先给定的目标函数值, $k+s=K$ 。

例如,考虑在 m 台平行机上对 n 个工件进行加工,这 n 个工件可以分为两类,由代理 1 和代理 2 分别负责 n_1 和 n_2 个工件($n = n_1 + n_2$)。代理 1(或代理 2)负责的工件 j 的加工时间记为 p_j^1 (或 p_j^2),其权记为 w_j^1 (或 w_j^2),就绪时间和交货期记为 r_j^1 (或 r_j^2)和 d_j^1 (或 d_j^2),完工时间记为 C_j^1 (或 C_j^2)。这两个代理的目标函数可以不同,例如代理 1 的目标函数是 L_{\max}^1 ,而代理 2 的目标函数是 $\sum w_j^2 C_j^2 \leq Q$ 。在这个问题的最优排序中,可能是先加工代理 1 的部分工件,再加工代理 2 的部分工件,然后加工代理 1 的另一部分工件,如此等等。利用排序三参数表示,这个排序问题可以表示为: $Pm | r_j^1, d_j^1; r_j^2 | L_{\max}^1: \sum w_j^2 C_j^2 \leq$

Q。

(执笔:万国华 校阅:涂莘生)

随机排序(Stochastic scheduling) 处理随机场合下的排序问题。在确定性排序(Deterministic scheduling)问题中,各个参数如加工时间、交货期等都是已知常数。一旦这些参数不能事前完全知道,随机排序方法提供一种解决方案,其机理为:虽然问题的参数事先未知,但是如果同样或类似排序问题大量使用(即概率理论中的重复性),这些参数可以被当作随机变量。此时,需要优化的目标(比如说总完工时间)也是随机变量,需要在概率意义下求其最优解。目前采用较多的方法是优化其数学期望。由于在随机排序中所涉及的参数是随机变量,它们的值在未实现之前都是未知的,因此,当一部分随机变量实现或者部分实现之后,决策者对未实现或者未完全实现之随机变量的分布(亦即条件分布)会有新的认识(也就是信息更新)。如果技术允许,原有策略应该基于被更新的信息进行合理修正,因而使得随机排序的策略带有动态特征。

在随机排序中,根据技术条件的不同,策略有静态(Static policies)与动态(Dynamic policies)之分,而后者又可以分为完全动态(Unrestricted dynamic policies)和不完全动态(Restricted dynamic policies)。虽然静态策略的寻找也非易事,但是随机排序最本质的部分应该是在动态策略类中研究一定意义下的最优解问题。在动态策略研究方面目前最好的方法是离散时间和连续时间上的随机动态规划方法(Stochastic dynamic programming),在每个决策点(Decision epochs),决定下一个该处理的工作,以便最大化利益或者最小化成本。

(执笔:吴贤毅 校阅:蔡小强)

平行机(Parallel machine) 是功能基本相同的机器,每个工件只需要在这些机器中的任何一台上加工一次。依据工件在机器上加工的情况,平行机分为同型机、同类机和非同类机 3 类。平行机还可作为复杂机器环境的组成部分。例如,流水作业中某道工序的加工机器可以是多台平行机,称为混合流水作业(Hybrid flow shop)。

(执笔:谈之奕 校阅:刘康生)

同型机(Identical machine) 是对加工工件完

全相同的 (Identical) 平行机, 亦即机器的型号是相同的。因而, 一个工件在不同的同型机上的加工时间都相同, 也即所有的同型机加工同一个工件的速度都相同。默认的平行机通常是指同型机。

在同型机排序中, 常用的优化目标是最大完工时间。对于使最大完工时间为最小的同型机排序, 即使只有两台机器时也是 NP 困难的, 因此通常研究其近似解。常用的近似算法有列表算法 (List scheduling, LS) 和 LPT (Longest processing time) 算法。列表算法是把工件排成一个序列, 任何时候是加工排在最前面的工件, 如果这个工件需要加工并且可以加工 (机器有空闲) 的话, 直到所有工件都加工。列表算法不需要知道还没有加工工件的信息, 所以这种算法对于在线排序也可以采用。如果工件是按照加工时间非增的次序排列, 那么相应的列表算法就称为 LPT 算法。

(执笔: 王振波 校阅: 邢文训)

同类机 (Uniform machine) 是这样的平行机, 工件在不同机器上的加工时间可以不同, 但却是成比例的。这个比例因子就是机器加工工件的“速度”, 即机器对不同工件的“适应程度”是一致的 (Uniform)。当机器的型号比较新时, 其加工所有的工件都比较快。这时机器的型号可能不同, 但是类型是相同的。更确切地定义, m 台平行机称为是同类机, 如果工件 j ($j=1, 2, \dots, n$) 在其中一台机器上的加工时间是 p_j , 那么对所有的机器 i ($i=1, 2, \dots, m$), 存在 s_i (称为是机器 i 的加工速度), 使得工件 j 在机器 i 上的加工时间是 $p_{ij} = p_j/s_i$ 。如果所有的 $s_i=1$, 此时的平行机就是同型机。

在同类机排序中, 常用的优化目标是最大完工时间。由同型机可知, 对于使最大完工时间为最小的同类机排序是 NP 困难的。借助 LPT 算法, 改进的 LPT 算法和线性规划松弛算法可以得到此问题的常数因子的近似算法。

(执笔: 康丽英 校阅: 鲁习文)

非同类机 (Unrelated machine) 是这样的平行机, 工件在不同机器上的加工时间可以不同, 也不成比例, 与机器加工工件的“速度”无关 (Unrelated)。这时机器 i 加工工件的速度与工件 j 有关, 应该表示为 s_{ij} 。如果 $s_{ij} = s_i$ 对所有的 i, j 都成立, 此时的平行机就是同类机。

在非同类机排序中, 常用的优化目标是最大完工时间和总完工时间。由同型机可知, 对于使最大完工时间为最小的非同类机排序是 NP 困难的。对于机器台数为固定值时, 利用线性规划松弛算法可以得到此问题的 2-近似算法。对于使总完工时间为最小的非同类机排序, 可以转化为具有偶图 (二部图) 匹配结构的 0-1 整数规划, 可以给出此问题的多项式时间算法。

(执笔: 康丽英 校阅: 鲁习文)

流水作业 (Flow shop) 是两个及两个以上工件以相同的特定的机器次序在两台及两台以上机器上加工的排序问题, 用三参数表示为 $F_m|\beta|\gamma$, 其中 F 表示流水作业, m 为机器的台数。不失一般性, 流水作业工件集 $J: \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ 的每个工件 J_j 都按照机器集 $M: \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ 中机器的下标次序 $\{1, 2, \dots, m\}$ 在这 m 台机器上依次加工。每个工件的工序个数都是 m 。流水作业大多是 NP 困难的, 只有少数特殊情形是多项式可解的。

(执笔: 王雄志 校阅: 王国庆)

自由作业 (Open shop) 是两个及两个以上工件依次在机器次序并不指定的两台及两台以上机器上加工的排序问题, 用三参数表示为 $O_m|\beta|\gamma$, 其中 O 表示自由作业, m 为机器的台数。每台机器上加工所有工件的次序和每个工件被所有机器加工的次序都是自由作业要决策的。自由作业大多都是 NP 困难的, 只有少数情形是多项式可解的。

(执笔: 陈荣军 校阅: 张峰)

异序作业 (Job shop) 是两个及两个以上工件以各自特定的机器次序在两台及两台以上机器上加工的排序问题, 用三参数表示为 $J_m|\beta|\gamma$, 其中 J 表示异序作业, m 为机器的台数。异序作业中每个工件以各自特定的机器次序加工, 而且工序的数目可以不相同, 可以小于 m 。异序作业大多是强 NP 困难的, 主要通过近似算法或启发式算法求解。流水作业是一种特殊的异序作业。自由作业可以理解成“松弛”的异序作业。

(执笔: 王雄志 校阅: 王国庆)

在线排序 (Online scheduling) 如果在排序之前, 已经知道工件的全部信息, 这种排序称为离线

(Off-line)排序;如果工件的信息是逐步释放的,在决定当前工件的加工时对其后面就绪工件的信息一无所知,并且一旦决定工件的安排后就不允许改变,这种排序称为在线排序。在线排序分为两种:按序(Over list)在线排序和按时(Over time)在线排序。按序在线排序中,工件排成一个序列逐个出现,只有当一个工件前面的工件全部安排后,才知道这个工件的信息。按时在线排序中,每个工件都有一个就绪时间,只有当工件就绪后才可以知道这个工件的信息。另外,如果当一个工件就绪后,就知道其加工信息,那么这种在线排序称为可预测的(Clairvoyant)。如果一个工件直到加工结束时才可以知道其加工信息,那么这种在线排序称为不可预测的(Non-clairvoyant)。离线排序的困难在于计算资源的有限性,在线排序的困难在于信息的匮乏。在线排序研究的主要手段是算法竞争比(Competitive ratio)分析。

(执笔:王振波 校阅:邢文训)

半在线排序(Semi on-line scheduling) 是介于在线排序和离线排序之间的排序问题。在线排序有两个重要条件:工件的信息是逐步释放的;不允许改变已安排工件的决策。若上述两类条件部分满足则称为半在线排序。一般来讲,半在线模型分为两类,一是提前预知工件的部分信息,二是部分地调整已经安排的工件。第一类模型主要包括:已知所有工件加工时间的总和;已知工件的最大加工时间;已知最后到达工件的信息;已知问题的最优值;工件按照某种已知的特定次序到达(如按照加工时间从小到大或者从大到小的次序到达等)、工件的加工时间属于某个给定的区间;预先知道即将出现的若干工件的信息;带缓冲器(Buffer)的排序等等。第二类模型主要有:可调整最后一个安排的工件;可重排任意 k 个工件;改变工件的决策有相应的费用等等。半在线模型还可以是上述模型的组合,即同时已知或者满足两个或者两个以上的条件。与在线排序一样,衡量半在线排序算法的优劣往往采用竞争比分析。与在线排序相比,半在线排序一般有较好的竞争比。

(执笔:叶德仕 校阅:谈之奕)

批处理排序(Batch scheduling) 是机器可以同时加工一批多至 $B(B \geq 1)$,称为机器的容量)个工

件;又称为分批排序或者同时加工排序;产生于 20 世纪 90 年代初大规模的流水作业生产线,如半导体生产、航空工业、钢铁铸造、制鞋业等等。同一批中的工件具有相同的开工时间和相同的完工时间,而批的就绪时间就是该批中所有工件的最大就绪时间。在继列分批(Serial batching)中,每一批都有一个固定的安装(Set-up)时间,并且批的加工时间等于该批中所有工件的加工时间之和;而在平行分批(Parallel batching)中,批的加工时间等于该批中所有工件的最大加工时间。分批排序就是确定工件的批划分,并安排批的加工使得目标最优。

(执笔:张玉忠 校阅:原晋江)

可控排序(Controllable scheduling) 工件的参数,包括加工时间、交货期、就绪时间或权等可以通过改变资源控制其大小的排序问题称为可控排序。

记工件集合 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$,工件的加工次序 $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$,控制参数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (其中 x_j 是工件 J_j 的加工时间、交货期、就绪时间或权等)。可控排序考虑两个目标,一个是工件的完工费用,即为通常的排序问题目标,记为 $F_1(x, \pi)$,另一个是控制工件参数 x 所需的控制费用,记为 $F_2(x)$ 。完工费用 $F_1(x, \pi)$ 和控制费用 $F_2(x)$ 的总和称为总费用。记 Π 是工件的所有加工次序, X 表示控制参数全体取值。4 种可控排序如下所述:

(P1)使总费用最小:

$$\min\{F_1(x, \pi) + F_2(x) \mid x \in X, \pi \in \Pi\}。$$

(P2)在有限的完工费用下使控制费用最小:

$$\min\{F_2(x) \mid F_1(x, \pi) \leq \tau, x \in X, \pi \in \Pi\}, \text{ 其中 } \tau \text{ 是给定的常数。}$$

(P3)在有限的控制费用下使完工费用最小:

$$\min\{F_1(x, \pi) \mid F_2(x) \leq \kappa, x \in X, \pi \in \Pi\}, \text{ 其中 } \kappa \text{ 是给定的常数。}$$

(P4)两个目标的帕累托(Pareto)有效解:

$$\min\{F_1(x, \pi), F_2(x) \mid x \in X, \pi \in \Pi\}。$$

(执笔:张峰 校阅:刘朝晖)

多目标排序(Multi-criteria scheduling) 是研究多个目标的排序问题。由于多个目标之间常常是相互“冲突”的,一般不存在使多个目标同时达到最优的“绝对”最优解。多目标排序分成 3 类。第 1 类是寻找约束解和多重解(Hierarchical solution)。对

两个目标函数 γ_1 和 γ_2 来讲,如果是在第 1 个目标函数 γ_1 满足一定的约束条件下,使第 2 个目标函数 γ_2 为最优,这样得到的解称为约束解。特别,如果是在第 1 个目标函数 γ_1 为最优的条件下,使第 2 个目标函数 γ_2 为最优,这样得到的解称为多重解。第 2 类是寻找帕累托(Pareto)有效解(Efficient solution),又称为非支配解。排序 π 称为是两个目标函数 γ_1 和 γ_2 为最小的有效解,如果使得 $\gamma_i(\sigma) \leq \gamma_i(\pi)$ ($i = 1, 2$),并且在这两个不等式中至少有一个严格不等号成立的这种排序 σ 不存在的话。第 3 类是用构造权函数(Weighted criteria)的方法把多目标排序转化为单目标排序。这种方法得到的多目标排序的解称为权函数解,其中最重要的权函数是线性加权函数。对两个目标函数 γ_1 和 γ_2 来讲,就是 $\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2$ 。关于两个目标函数的大部分结果可以直接推广到 3 个或者更多个目标函数的情况。对多台机器不论是平行机还是串联机,也都可以研究相应的多目标排序问题。

(执笔:张峰 校阅:刘朝晖)

准时排序与窗时排序(Just-in-time scheduling and due window scheduling) 对于工件在交货期之前完工和之后完工都要支付费用的排序问题称为准时排序。准时排序的重要研究方向是工件具有共同交货期的情况,分为两类问题,一类是共同交货期为给定的参数;另一类是共同交货期为决策变量。

准时排序主要研究两类目标函数:总费用函数 $f = \sum_j (\alpha_j E_j + \beta_j T_j + \theta_j C_j + \gamma_j d_j)$ 与最大费用函数 $f = \max_j \{\alpha_j E_j, \beta_j T_j\}$, 其中 $\alpha_j, \beta_j, \theta_j, \gamma_j$ 分别表示提前、延误、完工时间、交货期的单位费用。

如果把工件 J_j 的交货期 d_j 改为时间区间 $[d_j^1, d_j^2]$, 即工件在时间区间 $[d_j^1, d_j^2]$ 内完工没有“惩罚”,不需要支付费用,在时间 d_j^1 之前完工(提前),或在时间之后 d_j^2 完工(延误)都要支付费用。这样的排序问题称为窗时排序,窗时排序是准时排序的推广。

(执笔:张峰 校阅:刘朝晖)

正则排序(Regular scheduling) 如果优化目标是工件完工时间的非减函数,则称为正则目标函数。具有正则目标函数的排序问题称为正则排序问题。经典排序问题仅考虑正则目标,如最大完工时间 C_{\max} 、带权总完工时间 $\sum w_j C_j$ 、最大延迟 L_{\max} 、误工工件数 n_T 等。对正则排序问题,最优排序只需

在半活动排序中求解。半活动排序是指在不改变工件在机器上的加工次序前提下,不可能提前任何一个工件的完工时间。半活动排序的全体又称为优势集(Dominant set)。因此,正则排序只要在优势集寻找最优解。构造尽可能小的优势集,对求解正则排序问题有特殊的意义。对于半活动排序,机器对工件的加工次序一旦确定,则机器对工件的开工时间也就唯一确定。这时,最优排序由其机器对工件的加工次序唯一确定。因此,此时求最优排序便转化为仅求机器对工件的加工次序问题。准时排序是典型的非正则排序。

(执笔:陈秋双 校阅:涂萃生)

鲁棒排序(Robust scheduling) 是作为解决不确定性的一类排序问题。鲁棒排序通过事先考虑环境中一定程度的不确定性,使得产生的预排序(Predictive schedule)具有抵御可预测的扰动的能力,其关注的焦点是预排序在不确定环境下的稳定性。

目前,在鲁棒排序中考虑的不确定性主要是工件加工时间的不确定性和机器故障。鲁棒排序的概念针对不同的研究问题和要求,有不同的含义。如:扰动发生后,1)预排序仍为一个可行排序(工件加工次序和开始加工时间可以维持不变);2)预排序为可行排序的概率不低于某一水平;3)对预排序的实时调整可限定在某一局部范围之内。常用鲁棒排序方法有时间冗余法、鲁棒优化、多目标优化等。鲁棒排序方法通常应用于不希望频繁调整预排序的场合。

鲁棒排序的概念应用非常广泛,除上述鲁棒机器排序外,还有鲁棒项目排序、鲁棒航班排序等,在这些领域,多数称为鲁棒调度。

(执笔:陈秋双 校阅:涂萃生)

混合流水作业(Hybrid flow shop) 混合流水作业包含 s 个加工阶段(工序),每个加工阶段 i 有 $m_i \geq 1$ 台平行机,但至少有一个加工阶段的平行机数 $m_i \geq 2$ ($i = 1, \dots, s$)。这些平行机可以是同型机、同类机或非同类机。每个待加工的工件 j ($j = 1, \dots, n$) 依次经过这 s 个加工阶段,且工件在作业中的流程是单一方向的。在每个阶段,每个工件只能在一台机器上加工,而一台机器一次至多加工一个工件。混合流水作业问题的目标是在决定每一阶段处理工件的机器分配及该机器上工件的加工次序和开始加工时间,使得给定的目标函数最小。

如果 $s = 1$ 且 $m_i = 1$, 则是单机排序; 如果 $s = 1$ 且 $m_i > 1$, 则是平行机排序; 如果 $s > 1$ 且 $m_i = 1$, 则是流水作业。

混合流水作业是流水作业排序和平行机排序的扩展, 又称为具有多台平行机的流水作业或柔性流水线问题, 是一类复杂的作业排序问题。与经典流水作业相比, 混合流水作业的某些加工工序上存在平行机, 因此混合流水作业具有平行机排序问题的特征, 其求解较经典流水作业排序问题更为困难。这类问题在流程工业中如钢铁、化工等工业中比较常见。

(执笔: 唐立新 校阅: 万国华)

半连续型批处理排序 (Semi-continuous batch scheduling) 半连续型批处理排序问题中机器可以同时加工多个工件。我们把在同一机器中按照同一加工模式(如加热炉中的加热制度)进行加工的相邻工件称为一个批。与传统间隙型批处理机排序问题属于同批的工件批进批出的方式不同, 本问题中属于同一批中的工件进入和离开机器是按照周期匀速(半连续)进行, 每一个工件都有自己的开始加工时间和完工时间。而与纯连续型批处理机排序问题不同, 工件是间隔进入而不是连续进入机器的。该问题中的每个工件的加工时间均等于该批工件中加工时间的最大者, 称为基本加工时间。批的加工时间是从该批中的第一个工件到达机器开始, 到最后一个工件完工所用的时间, 与该批的大小、批中工件的加工时间及机器的容量均有关。半连续型批处理排序问题包括如何分批及安排批的加工次序。这个问题来源于钢铁工业中加热炉对钢坯的加热过程, 在冶金工业其他存在加热过程的工业流程中也普遍存在。

(执笔: 唐立新 校阅: 万国华)

耽搁排序 (Delay schedule) 如果有已经就绪可以加工的工件或者工序, 就不允许有机器空闲的排序称为无耽搁排序 (Nondelay schedule); 否则称为耽搁排序。对于大多数排序问题, 包括所有的可中断排序, 其最优排序都是无耽搁排序, 但也存在不可中断排序问题, 其最优排序是耽搁排序。

对于多道工序需要同时占用共享资源的耽搁排序, 目前还没有最优排序的解析算法。一般采用试探性深度搜索和广度搜索的方法, 对工序能否耽搁进行优先风险评估。

(执笔: 潘郁 校阅: 唐恒永)

不确定性排序 (Uncertain schedule) 是在不确定环境中的排序问题。如工件的加工时间、交货期、就绪时间和机器的种类及加工能力等参数是不确定的。根据其不确定性的性质, 可以分为随机排序、模糊排序、灰色排序和其他类型的不确定性排序等。如果大样本多数据的不确定, 就可以用随机排序解决; 如果属于认识不确定性, 就可以用模糊排序解决; 如果属于少数据、小样本、信息不完全和经验缺乏的不确定性问题, 则可以用灰色排序解决。

对于不确定性排序问题中存在排序内容不完整、排序结构不完备、排序模型描述存在不协调或者排序问题的参数动态变化等, 可以用不确定性人工智能 (Artificial intelligence with uncertainty) 方法寻求满意解。

(执笔: 潘郁 校阅: 唐恒永)

排序博弈 (Scheduling game) 是 1950 年纳什 (Nash) 建立的纳什合作博弈模型 (Nash bargaining model, NBM) 整数取值的离散化扩展。此模型中商业合作联盟要合理划分的对象是有限个工件组成的工件集。联盟中每个成员取整数值的合作收益函数, 定义在工件所有可行划分所构成的集合上。对每个给定的工件划分, 合作收益考虑与工件加工排序有关的加工成本。这个成本可以是经典排序中的一个或者几个时间相关费用函数的最小值。

原先的纳什合作博弈模型是使得两个合作收益的乘积为最大。由于假定两方合作收益的帕累托 (Pareto) 有效集 (Efficient set) 是连续和闭凹的, 从而使得得到乘积为最大的一对合作收益 (称为可行博弈解) 存在并且唯一; 这个可行博弈解还是满足纳什提出的四条公理的唯一解。这个可行博弈解称为纳什博弈解 (Nash bargaining solution, NBS)。

原先的纳什合作模型是研究两人的合作博弈, 目前排序博弈也仅讨论联盟是由两个成员组成。排序博弈中的帕累托有效集是没有上述性质的离散有限集, 因而排序博弈是要设计适合于上述离散情形的博弈解合理性的评判准则。至今主要的方案是引入主观决策理论中的评价准则, 并相应地把上述的纳什合作博弈问题扩展为有限个最优化问题, 把合理博弈解扩展为合理的博弈解集, 但是博弈解集的公理化唯一性条件尚需研究。分析这些最优化问题的复杂性和设计求解的算法是很有挑战性的研究。目前已经确定一批问题的复杂性, 并且出现动态规

划的精确算法,但是大量问题的复杂性还有待研究,有关的精确算法和近似算法还未出现。

(执笔:顾燕红 校阅:唐国春)

手术排程 (Surgery scheduling) 是医院手术医生提出手术申请后具体安排患者在哪间手术室、什么时间进行手术,以及确定相应的麻醉医师、护士和手术设备等医院手术资源的优化问题。如果把手术患者看成是待加工的工件,把手术医生、麻醉师、护士和手术设备等看成是实施手术同时需要的各种机器,那么一台手术就是需要多台机器同时进行加工的工件(Multi-machine job, MMJ)。如果把医院中多间手术室看成多台平行机,那么手术排程就是需要多台机器同时加工工件的平行机排序问题(A parallel machine problem with MMJ)。

(执笔:罗守成 校阅:钟力炜)

人力资源排序 (Workforce scheduling) 是决策一个单位的员工每周工作日排班和每日工作时段安排的问题。有效的人力资源排序可以降低人力资源成本,提高客户服务水平,以及增加员工的满意度。该问题经常出现于一周需要工作 7 天,每天至少一个轮班的单位,如医院,酒店,机场等服务部门。很多学者以医院的护士排程为背景进行此类问题研究。此类问题中很多是 NP 困难的,复杂性来自于人力资源的结构(多类员工、全职或兼职员工等)、排班的规则(轮班的最大/最小时长,休息时间和频率,连续工作天数等)及其他约束条件。

(执笔:李勇建 校阅:涂莽生)

排序反问题 (Inverse scheduling problem) 排序问题(“正问题”)是在已知工件、机器等有关参数或者数据条件下,寻找工件加工次序使所给定的目标函数为最优。排序反问题是假设工件的加工次序已经给定,但该加工次序对所给定的目标函数并非最优,需要考虑如何最小限度地调整现有参数或数据,使给定的加工次序在新的情况下成为所对应的目标函数的最优序,进而考虑如何调整问题的输入参数,使得排序作业系统处于最优状态。如果说“排序正问题”的研究有助于一个新系统的设计和确定,那么排序反问题的研究对改善现有系统的性能具有重要的意义。

(执笔:陈荣军 校阅:张峰)

最坏情况分析 (Worst-case analysis) 是评价离线算法(Off-line algorithm)性能的理论方法,在装箱(Bin-packing)、旅行商(Traveling salesman)和排序(Scheduling)等组合优化问题中较为常见。最坏情况分析是研究在所有参数都已知的情况下,算法的目标函数值与最优值之间的最大误差,通常采用比值的形式来衡量。对于求最大(或者最小)的问题 π ,记 I 是问题的实例,令 Z^A 表示算法 A 对于实例 I 的目标函数值, Z^* 表示实例 I 的最优值,则

$$R_A(\pi) = \inf \{R \geq 1 \mid \text{对于所有的实例 } I, \\ \text{有 } Z^A / Z^* \text{ (或者 } Z^* / Z^A \leq R)\}$$

称为算法 A 的最坏情形性能比(Worst-case performance ratio)。如果可以找到实例使上式中的比值取等号,则称该比值是紧界(Tight)。这时该比值无法再进一步改进。得到紧界的实例是人为构造的特殊实例,在实际问题中出现的可能性很小。

(执笔:白丹宇 校阅:鲁习文)

竞争分析 (Competitive analysis) 是评价在线算法(On-line algorithm)性能的理论方法,在装箱、旅行商和在线排序等组合优化问题中较为常见。竞争分析是研究在线算法的目标函数值与离线环境下的最优值之间的最大误差,通常采用比值的形式来衡量。对于求最大(或者最小)的问题 π ,记 I 是问题的实例,令 Z^A 表示在线算法 A 对于实例 I 的目标函数值, Z^* 表示实例 I 在离线环境下的最优值,则

$$R_A(\pi) = \inf \{R \geq 1 \mid \text{对于所有的实例 } I, \\ \text{有 } Z^A / Z^* \text{ (或者 } Z^* / Z^A \leq R)\}$$

称为在线算法 A 的竞争比(Competitive ratio)。如果可以找到一个实例使上式中的比值取等号,则称该比值是紧界。这时该比值无法再进一步改进。同最坏情况分析一样,得到紧界的实例是人为构造的特殊实例,在实际问题中出现的可能性很小。

(执笔:白丹宇 校阅:鲁习文)

渐近性能分析 (Asymptotic performance analysis) 是评价离线算法(Off-line algorithm)性能的理论方法,在装箱、旅行商和排序等组合优化问题中较为常见。渐近性能分析是研究在所有参数都已知情况下,问题规模趋于无穷大时算法的目标函数值与最优值之间的接近程度,通常采用比值的形式来衡量。对于求最大(或者最小)的问题 π ,记 I 是问题的实例,令 Z^A 表示算法 A 对于实例 I 的目标函数

值, Z^* 表示实例 I 的最优值, 则

$$R_A^*(\pi) = \inf \{R \geq 1 \mid \text{存在 } n_0,\}$$

对于所有规模 $n \geq n_0$ 的实例 I , 有 $Z^A(I) / Z^*(I)$
(或者 $Z^*(I) / Z^A(I) \leq R$)

称为算法 A 的渐近性能比 (Asymptotic performance ratio)。

离线算法的渐近性能比是不大于其最坏情况性能比。特别地, 如果算法的渐近性能比为 1, 则称该算法是渐近最优的 (Asymptotically optimal)。如果算法是渐近最优的, 那么当问题的规模趋近于无穷大时 (理想状态), 由该算法得到的目标函数值与问题的最优值是等价的。换句话说, 在理想状态下可以把该算法看作是最优的, 这个性质特别适用于大规模的工业生产环境。

(执笔: 白丹宇 校阅: 鲁习文)

渐近竞争分析 (Asymptotic competitive analysis) 是评价在线算法 (On-line algorithm) 性能的理论方法, 在装箱、旅行商和在线排序等组合优化问题中较为常见。渐近竞争分析是研究问题规模趋于无穷大时, 在线算法的目标函数值与离线环境下的最优值之间的接近程度, 通常采用比值的形式来衡量。对于求最大 (或者最小) 的问题 π , 记 I 是问题的实例, 令 Z^A 表示在线算法 A 对于实例 I 的目标函数值, Z^* 表示实例 I 在离线环境下的最优值, 则

$$R_A^*(\pi) = \inf \{R \geq 1 \mid \text{存在 } n_0,\}$$

对于所有规模 $n \geq n_0$ 的实例 I , 有 $Z^A(I) / Z^*(I)$
(或者 $Z^*(I) / Z^A(I) \leq R$)

称为算法 A 的渐近竞争比 (Asymptotic performance ratio)。

同渐近性能比一样, 在线算法的渐近竞争比是不大于其竞争比。特别地, 如果在线算法的渐近竞争比为 1, 则称该算法是渐近最优的。如果在线算法是渐近最优的, 那么当问题的规模趋近于无穷大时 (理想状态), 由该算法得到的目标函数值与离线环境下的最优值是等价的。换句话说, 在理想状态下可以把该算法看作是最优的, 这个性质特别适用于大规模的工业生产环境。

(执笔: 白丹宇 校阅: 鲁习文)

完工时间平方和 (Total quadratic completion time) 优化的目标是工件的完工时间的平方和 $\sum C_j^2$ 。与总完工时间 $\sum C_j$ 相比, 在 $\sum C_j^2$ 下, 工

件完工越迟则每单位时间产生的费用就越多, 因此使 $\sum C_j^2$ 最小可以理解为是使最大完工时间 C_{\max} 最小与使总完工时间 $\sum C_j$ 最小之间的折中。

(执笔: 白丹宇 校阅: 刘朝晖)

项目排序 (Project scheduling) 项目排序由活动、资源和目标三要素构成, 用以求解项目活动的时间排序以实现特定的目标要求。其结果是生成项目进度计划及相应的资源配置方案, 可为项目的实施提供指导。

活动分为零时滞结束-开始 (Zero time-lag finish-start) 的优先关系或一般网络的优先关系; 其执行可以是单模式或多模式, 允许或不允许中断等; 资源分为可更新 (可恢复、使用性) 资源 (Renewable resource)、不可更新 (不可恢复、消耗性) 资源 (Non-renewable resource) 和双重约束 (受限制) 资源 (Doubly constrained resource) 等; 优化目标有工期最小 (min-makespan)、净现值 (Net present value) 最大 (max-npv)、资源均衡 (Resource leveling)、成本最小 (min-cost) 或多重目标如时间-费用权衡 (Time-cost tradeoff) 等。

三要素基于现实情况的不同组合形成不同的项目排序问题。若某些参数在项目进行过程中会发生变化时, 便形成不确定型项目排序 (Uncertain project scheduling) 问题。

项目排序的数学模型多为数学规划, 常用的求解算法分为精确算法 (如分支定界算法) 和启发式算法 (如模拟退火、禁忌搜索、遗传算法等) 两大类。

(执笔: 何正文 校阅: 徐渝)

项目支付排序 (Project payment scheduling) 项目支付排序是使净现值最大的项目排序的一个分支, 用以合理安排项目支付的问题, 包括支付次数、支付时间及支付量, 使得用净现值表示的项目收益实现最大。

根据考虑主体的不同, 可分别从承包商、业主及双方整合的视角建模求解。项目支付通常依赖于活动完成的进展程度, 因此, 在对支付进行排序时, 一般需要同时确定活动的排序以及不同的合同支付条件, 如基于时间的支付、基于费用的支付、基于进展的支付和基于里程碑的支付等对排序结果的影响。

项目支付排序的约束条件主要包括网络优先关系、项目截止日期及支付比例等, 其决策变量通常为

离散的,构建的模型多属于非线性整数规划。求解方法可分为精确算法和启发式算法两大类,前者可获得最优解,具有较高的理论意义;后者得到的是满意解,具有更强的实际应用价值。

(执笔:何正文 校阅:徐渝)

3 结束语

本文汇编排序论中最基本的 39 条术语。目的是征求意见,为编撰完整的《排序论辞典》创造条件。39 条术语由排序分会的 34 位专家编撰和审阅,采用执笔人和校阅人署名负责的方式,大家都非常认真和慎重。然而本稿的撰写还很仓促,仍有许多不足之处,希望读者提出意见;也欢迎大家对以后编写《排序论辞典》提出建议和提供条目。请用 E-mail 同时发到邮箱 gtang@sh163.net 和 gctang@sspu.cn。

致谢:感谢秦裕瑗教授和林诒勋教授仔细审查全文,提出很好的意见!

参考文献:

- [1] 越民义,韩继业. n 个零件在 m 台机床上的加工顺序问题(I)[J]. 中国科学,1975(5):462-470.
- [2] 周荣生. 汉英综合科学技术词汇[M]. 北京:科学出版社,1983.
- [3] Potts C N, Strusevich V A. Fifty years of scheduling: a survey of milestones[J]. Journal of the Operational Research Society, 2009, 60: S41-S68.
- [4] 唐国春,张峰,罗守成,等. 现代排序论[M]. 上海:上海科学普及出版社,2003.
- [5] 唐国春. 关于 Scheduling 中文译名的注记[J]. 系统管理学报, 2010, 19(6): 713-716.
- [6] 唐国春. 一万米高空是晴天——教坛漫笔[M]. 广东:珠海出版社,2011.
- [7] Baker K R. Introduction to sequencing and scheduling [M]. New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [8] Pinedo M L. Scheduling: theory, algorithms, and systems [M]. 3rd Edition. New York: Springer, 2008.

Operations Research and Cybernetics

Review of Basic Concepts of Scheduling Theory

TANG Guo-chun

(Economics & Management School, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: Operations research rose in World War II, firstly people regarded operation as a research object. The study of operation's time arrangements contributed to the establishment of the scheduling' concept and research development. After about 50 years' development, the terms of scheduling are gradually moving toward reunification in China. It is a sign which indicates that discipline scheduling is maturing, and also is the needs of academic exchange. *Mathematics Dictionary*, which was edited and published by academician Wang Yuan in August 2010, is a comprehensive mathematical dictionary. And its second version is currently being revised. This Scheduling Society of Operations Research Society of China organized 34 experts to write and review the 39 most basic entries of scheduling theory. This article reviewed the basic concepts of scheduling theory and tried to lay a solid foundation for the complete *Dictionary of Basic Scheduling Theory*.

Key words: operations research; scheduling; review

(责任编辑 黄颖)