

《重庆师范大学学报(自然科学版)》
“运筹学与控制论”栏目 2019 年合集

基于蚁群算法的无人机任务规划优化模型研究.....	蒋 莎, 刘学文, 叶家君(2)
绩效评价中最优基础工作量的研究.....	李茜婷, 陈培章, 赵克全(9)
基于演化博弈的制造业金融化调控机制研究.....	张保帅, 沈坤平, 田 盈, 赖 苹(15)
基于排队行为的专家门诊预约中患者决策建模研究.....	羊 英, 李 静(22)
具有独立偏好的三方匹配问题.....	张 峰, 钟力炜(30)
多目标优化问题 $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ -拟真有效解的一个充分条件.....	马圆圆, 彭建文(35)
基于 Push-Sum 的分布式 Gradient-Free 算法研究.....	余淑辉, 李觉友, 杜学武(40)
带有学习与恶化效应的共同工期指派问题.....	王吉波, 梁茜茜, 张 博(47)
多目标优化问题近似解的组合标量化.....	何爱华, 张晓青, 赵克全(53)
供应不确定下承诺定价策略与响应定价策略的对比研究.....	吉清凯, 王 冠(57)
基于 CVaR 带有改进的典型交易成本的多目标投资组合模型.....	宋慧慧, 龙宪军, 龙 强(62)
改进灰狼优化算法医疗锂电池剩余寿命预测.....	何 成, 刘长春, 武 洋, 吴 涛, 陈 童(67)
两阶段供应链下极小化最大完工时间的单机系列批排序.....	张新功, 陈 娟(75)
带不耐烦顾客和工作故障的多重休假排队系统.....	马占友, 曹 建, 于向然, 郭闪闪, 陈 利(81)
考虑客户满意度的物流公司终端配送线路优化.....	范志强, 胡彦勇(88)
基于图论的预约-分配的模型和算法研究.....	李 斌, 李 群, 刘亦萍(96)
双渠道环境下异质品布局和定价策略研究.....	张廷龙, 顾周凡(105)
基于贝叶斯纳什均衡的政府补贴过度转移存在性研究——以不完全竞争纵向市场为例.....
.....	陈 哲, 梁绍东, 王雪颖(114)
求解随机变分不等式问题的修正外梯度随机逼近算法.....	张小娟, 杜学武(120)
物流网络下的多产品多阶段随机库存问题.....	刘丰年, 付永彬, 孙海琳(126)
模糊环境下物流服务供应链订单分配问题研究.....	胡彦勇, 范志强(139)
碳税政策下基于回收质量不确定的闭环供应链定价策略.....	张铃铃, 陈淮莉(146)
α -半预不变凸性及其应用研究.....	李 婷, 彭再云, 邵重阳, 王泾晶(156)
具有老化效应或学习效应的两人合作排序博弈问题.....	刘 鹏, 王小丽(163)
工件可外包的单机准时排序问题.....	李寒雪, 樊保强, 陈继文, 郭志佳, 杨燕英, 李 欣(170)
考虑均衡各站乘客等待时间的城市轨道交通客流协同控制模型.....	甘金荣, 陈治亚(177)
基于患者门诊就医的双任务排序问题.....	范 静, 吴惠静(186)

基于蚁群算法的无人机任务规划优化模型研究*

蒋莎, 刘学文, 叶家君

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】为了研究无人机在灾情巡查中的航径优化问题。【方法】设计了一个蚁群算法求解该问题,并通过仿真实例进行验证。【结果】无人机的航径优化问题是一种具有多约束条件的复杂任务规划问题,将时效性和均衡性为核心的评价体系考虑到问题中,构建一个双目标优化模型,实现了无人机的外部合理分配和内部航径优化。【结论】仿真结果表明提出的模型与算法在解决无人机巡查灾情飞行航径方面具有一定的应用价值。

关键词:灾情巡查;任务规划;巡查点;蚁群算法;飞行航径

中图分类号: O221.6

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)01-0001-07

无人机作为一种新型运载工具,应用领域早已从军事行动扩展到对社会各种突发事件应急响应,且由于其具有便捷性和灵活性等特点,被广泛应用于地震灾后救援任务领域,如灾情巡查、生命探测、物资援助、通信传输等,以便及时捕获灾情信息,达到最短时间最大范围救援以减少灾后损失的目的。因此无人机在应急管理中的研究也成为各国学者关注、探索的热点问题之一。

美国空军研究实验室在无人机任务分配研究中建立了带时间窗的不同能力约束车辆路径问题模型,并应用于“全球鹰”无人机和“捕食者”无人机的侦察任务规划问题建模^[1-3];韩攀等人^[4]将无人机执行任务的航迹代价模型转化为旅行商问题,引入去交叉禁忌搜索策略,利用改进的蚁群算法实现航迹规划;韩玉龙等人^[5]采用最小生成树方法优化任务规划模型,将复杂的多目标优化问题解耦处理,先利用单旅行商问题模型缩小可行解的范围,再建立多 UAV 协同侦察任务规划模型利用蚁群算法求解;罗贺等人^[6]分析了多无人机任务分配经典模型中存在的局限性,建立了基于 Agent 协商的多无人机任务分配模型;叶媛媛等人^[7]在任务规划系统的框架中运用 VORONOI 图为主的算法,实现了无人机的静态单航路线和多航路线协同规划;席庆彪等人^[8]提出了一种在威胁环境下运用 A* 算法进行目标跟踪的方法,主要考虑了地形和雷达威胁,利用目标的实时信息和改进的 A* 算法达到目标追踪;赵晨皓等人^[9]为解决不规则区域内 UAV 最短覆盖搜索路径的规划问题提出了一种新的求解方法,即 PEGA 算法;龙国庆等人^[10]对目标提出基于模糊均值聚类算法的多无人机系统任务分配方法,从局部出发优化,得到快速分配方案。从上述研究可以发现,近几年灾情巡查任务规划涌现了不少新思路和新方法。其中主要思路包括车辆路径问题模型、旅行商问题模型、Agent 协商问题模型等,主要方法包括 VORONOI 图搜索法、交叉禁忌搜索法、A* 算法、PEGA 算法、基于模糊 C-均值聚类算法和基于生物激励神经网络的航径规划算法等^[1-11]。无人机在灾情巡查任务规划中基本上可以分为两种类型:一种是整体环境信息下的外部航径规划,另一种是对某些重点灾区信息中的内部航径规划。所以,在实际应急环境中不仅需要对外部航径进行整体规划,还需要对巡查的目标区域进行内部覆盖规划。鉴于此,本文借助目标区域的网格划分拟用蚁群算法兼顾无人机外部航径和内部覆盖任务规划同时进行求解,以提高无人机的使用效率。

1 单基地的多无人机协同巡查任务优化模型

1.1 问题描述与假设

地震发生后,管理层需要第一时间了解灾区具体的受灾人员、道路和地形等情况,以便及时制定救援方案。

* 收稿日期:2017-10-26 修回日期:2018-09-07 网络出版时间:2019-01-09 7:37

资助项目:国家自然科学基金(No. 11301574; No. 11271391)

第一作者简介:蒋莎,女,研究方向为向量优化理论, E-mail: 893458009@qq.com; 通信作者:刘学文,男,教授, E-mail: xuwenliu@cqu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190109.0731.016.html>

考虑到灾区地表形状复杂,在无人机飞行高度、观察范围的限定下,首先对灾区原始地形进行数据处理,借助网格划分,并结合离散化的方法选取满足条件的巡查点,利用最低点上方搜索范围最广特性,将目标区域“覆盖巡查面”转化为“有效巡查点”,以此确保巡查点均匀分布,提高无人机在一个存在避飞区的区域内的搜巡覆盖范围。其次设定无人机与目标区域是一对多的关系,即一架无人机可以对应多个目标区域,且一个目标区域可分配多架无人机的情况。最后考虑到派遣无人机巡查过程中要尽量满足飞行时间和航程最短,以及所受地形和油耗威胁最小,从而保证安全返航。因此,设立 6 个假设条件如下:1) 忽略无人机本身的体积质量,将无人机作为质点建立模型;2) 不考虑基地两架无人机起飞时间间隔和降落时间间隔要求;3) 无人机的探测范围不受天气等自然因素的影响;4) 所有无人机在执行任务过程中所有设备性能不会发生变化;5) 无人机能自动避开障碍,并回到既定路线;6) 为保证探测效果,在探测过程中无人机应保持匀速飞行。

1.2 双目标优化模型建立

整个模型中,用 H 表示基地的位置; I 表示巡查点的集合($\forall i, j \in I, i, j = 1, \dots, n$); K 表示无人机的集合($\forall k \in K, k = 1, \dots, n_k$); r 表示被巡查的目标区域($r = 1, \dots, n_s$); S 表示目标区域的集合; d_{ij}^{rk} 表示第 k 架无人机在目标区域 r 内从有效巡查点 i 到点 j 的距离; S_r 表示目标区域中满足要求的巡查点集合; $S_r(i)$ 表示目标区域内满足最大可探测高度的有效巡查点集合; t 表示无人机的飞行时间; t_{ij}^{rk} 表示第 k 架无人机在目标区域 r 内从有效巡查点 i 到点 j 的飞行时间; t_{rH}^k 表示第 k 架无人机从目标区域 r 到基地的飞行时间;用 x_{Hr}^k 表示第 k 架无人机是否到目标区域 $r \in S$ 巡查的 0-1 变量; y_{ik} 表示第 k 架无人机是否对最大可探测高度的有效点巡查的 0-1 变量; z_{ijk} 表示第 k 架无人机是否从有效点 i 到点 j 进行巡查的 0-1 变量。

灾情巡查的任务规划需要从方方面面考虑。在基地装备数目足以实现对所有目标区域巡查的情况下,应该先考虑成本费用,即期望派出执行任务的无人机数量尽可能的少;当无人机任务规划的均衡性达到最优时,又期

望所巡查的目标区域遮挡点尽可能的少,也即覆盖率达到最大,从而得到双目标函数: $N_K = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{r=1}^{n_s} x_{Hr}^k, c_{cov} =$

$$\frac{\sum_{r=1}^{n_s} c_{cov} \frac{p_{\text{point}}[S_r(i)]}{p_{\text{point}}[(S_r)]}}{n_s}.$$

然而,无人机在灾情巡查过程中区域覆盖搜索仅仅通过目标函数的刻画是不够的,由于区域覆盖巡查需要无人机在任务时间内持续沿一固定航线绕飞,故所生成的最佳覆盖巡查航径还需要通过以下多约束控制。

由于每架无人机受到燃油消耗的限制,续航时间不超过 t_1 小时,即 $t_{rH}^k + \sum_r \sum_i \sum_j t_{ij}^{rk} \leq t_1 (\forall k \in K)$ 。与此同时,无人机遍历每个目标区域所用时间不超过 t_2 小时,即 $\max\{\sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij}^{1k}, \dots, \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij}^{n_k}\} \leq vt_2$ 。

任何一个有效巡查点只能由一架无人机巡查,即 $\sum_{k=1}^{n_k} y_{ik} = 1, i = 1, \dots, n$ 。保证每架无人机在巡查完当前点后都会依顺序出发到下一个巡查点,即 $\sum_{j=1}^n z_{ijk} - \sum_{j=1}^n z_{jik} = 0$ 。无人机在巡查完毕后仍返回基地,即 $\sum_{i=1}^n z_{Hik} = 1, \sum_{i=1}^n z_{iHk} = 1$ 。

根据以上分析,无人机在灾情巡查中的双目标优化模型如下:

$$\min N_K = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{r=1}^{n_s} x_{Hr}^k, \quad (1)$$

$$\max c_{cov} = \frac{\sum_{r=1}^{n_s} c_{cov} \frac{p_{\text{point}}[S_r(i)]}{p_{\text{point}}[(S_r)]}}{n_s}, \quad (2)$$

$$\text{s. t. } t_{rH}^k + \sum_r \sum_i \sum_j t_{ij}^{rk} \leq t_1, \quad (3)$$

$$\max\{\sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij}^{1k}, \dots, \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ij}^{n_k}\} \leq vt_2, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n_k} y_{ik} = 1, i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ijk} - \sum_{j=1}^n z_{jik} = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{Hik} = 1, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{iHk} = 1, \quad (8)$$

$$x_{Hr}^k, y_{ik}, z_{ijk} \in \{0, 1\}. \quad (9)$$

其中,(3)~(6)式保证无人机遍历每个目标区域内的有效巡查点,并按照任务要求对整个任务区域进行覆盖搜寻;(7)~(8)式保证无人机飞行航线为一闭合回路;(9)式表示 0-1 变量。

2 基于蚁群算法的单基地多无人机巡查任务模型求解

尽管目前国内外学者提出了许多不同的无人机巡查任务规划算法,但按照本模型有效巡查点的提取方法,考虑到蚁群算法具有较强的鲁棒性,且蚂蚁在更新过程中通过巡查点蚂蚁数较多的地方能获得较大的信息素,有利于进一步使巡查区域覆盖率变大,从而完成既定的搜寻任务。故本文将采用蚁群算法对单基地多无人机巡查任务模型进行求解。

2.1 算法的实现

蚁群算法最初是由 Dorigo 等人^[1]提出的,该算法是受到真实的蚁群行为研究启发而提出的。无人机在灾情目标区域巡查的规划中应先给出目标区域内网格图各巡查点适合的信息素浓度初始值,形成初始巡查点信息素浓度值矩阵。然后将有效巡查点的初始值设为常数 c ,其余巡查点设为 0,这样,蚂蚁便不会巡查目标区域里的无效巡查点了,只会有效巡查点中巡查,得到的航径就很好地规避了遮挡点。接着,将蚂蚁全部置于起始基地 H 处,同时向目标方向行进,每只蚂蚁在行进中利用状态转移规则进行目标区域内的有效巡查点选择,最终完成目标区域的巡查。假设蚂蚁在该目标区域内有效巡查点 i 到下一方向任意有效巡查点 j 的时间相等,与距离无关,那么全部蚂蚁将同时巡查完毕,即完成一次循环。当所有的蚂蚁都巡查完目标区域后,依据各只蚂蚁巡查得到的有效航径目标函数,对该航径上的各巡查点进行全局信息素更新,对没有经过的各巡查点只进行信息素挥发,重复这个过程,直至求出优化航径。

2.2 巡查点选择准则

蚂蚁 k 在时刻 t 从巡查点 i 转移到巡查点 j 的概率为 $P_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \cdot \eta_j^\beta(t)}{\sum_{l \in A_k} \tau_{il}^\alpha(t) \cdot \eta_l^\beta(t)}, & l \in A_k \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$ 。式中, $\tau_{ij}(t)$ 表示

t 时刻巡查点 i 与巡查点 j 之间的信息素浓度,值越大则蚂蚁越倾向于选择上代蚂蚁走过的航径; $\eta_j(t)$, $\eta_i(t)$ 为启发函数,表示蚂蚁从巡查点 i 飞往巡查点 j 的期望值; α 为信息素权因子,值越大表示在转移中起到的作用越大; β 为启发函数的权因子,其值越大,则表示启发函数在寻找下一个巡查点中所起到的作用越大,即无人机会在满足情况的条件下以较大概率飞往下一点。 A_k 为蚂蚁 k 当前可选有效巡查点集合,随着时间的进行, A_k 中元素个数不断减少,直到为空集,即表示蚂蚁巡查完所有有效点。

2.3 信息素修正更新规则

蚂蚁释放信息素包括 3 种模型,分别是蚁周系统(ant cycle system),蚁量系统(ant quantity system)和蚁密系统(ant density system),其中本文用到蚁量系统模型为: $\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{Q}{J_k}, & \text{第 } k \text{ 只蚂蚁从巡查点 } i \text{ 搜查巡查点 } j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$ 。

式中 $\Delta\tau_{ij}^k(t)$ 表示第 k 只蚂蚁在时刻 t 到 $t+1$ 之间航线 $J(i, j)$ 上增加的信息素浓度; Q 是一个常数,表示蚂蚁行进完成一次后所释放的信息素总量; J_k 表示第 k 只蚂蚁搜巡航线的长度。通常用蚁量系统模型计算出来的信息素浓度,可以认为蚂蚁经过的航径越短被释放的信息素浓度越高。

假设蚂蚁的数量为 m ,每只蚂蚁的行为符合下列规律:根据航径上的信息素浓度,以相应的概率来选取下一

巡查点;不再选取自己本次循环已经走过的航线,用数据结构来控制这一点;当完成了一次循环后,根据整个航线长度来释放相应的信息素,并更新走过的航线上的信息素浓度。更新规则如下:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t) \quad (10)$$

其中: $\Delta\tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k(t)$; $\rho \in (0,1)$ 为挥发因子,表示信息素消失的快慢程度,它的值影响算法的全局搜索能力和收敛速度。

2.4 算法流程

根据上述原理和规则,蚁群算法巡查有效航径的步骤如下:

步骤 1,初始化目标区域网格图上所有巡查点的信息素,形成初始信息矩阵;

步骤 2, m 只蚂蚁位于起始位置 H 处等待出发;

步骤 3,预先确定需要巡查的目标区域,在区域内每只蚂蚁根据状态转移规则选择网格图上的下一巡查点,即选择满足最大可探测高度的有效点进行巡查,直至各只蚂蚁在规定的时间内完成内外部的巡查,最终形成一条有效航径;

步骤 4,计算各蚂蚁得到的有效航线的目标函数,保存最优航径解;

步骤 5,依据信息素修正更新规则(10)式,对各点的信息素进行调整;

步骤 6,判断是否满足迭代条件:若达到设定的迭代次数或目标函数,则完成巡查,即步骤 7,否则跳转到步骤 2;

步骤 7,输出最优航径,结束。

3 仿真实例

3.1 实例数据

2017 年全国研究生数学建模竞赛 A 题“无人机在抢险救灾中的优化应用”提出了如下问题:面对四川阿坝州九寨沟县发生的 7.0 级地震,为了及时了解灾区情况制定救援方案,欲使用无人机携带视频采集装置对 7 个目标区域(A,B,C,D,E,F,G \in S)中心半径 10 km 以内的灾情进行巡查。其中无人机的平均飞行速度为 $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,无人机飞行高度恒为 4.2 km,最大续航时间为 8 h,无人机飞行时的转弯半径不小于 100 m,且将在地面某点看无人机的仰角大于 60° 且视线不被山体阻隔视为该点被巡查。若所有无人机均从基地 H 处派出,且完成任务后再回到 H,希望在 4 h 之内使区域 S 内海拔 3 km 以下的地方尽可能多地被巡查到,计算所需最少无人机数量和最大覆盖率,优化设计每架无人机的飞行路线,并用不同的颜色标记出来。S 集各个目标区域的海拔情况如图 1 所示,S 集中海拔低于 3 km 的有效巡查点相关数据见表 1。

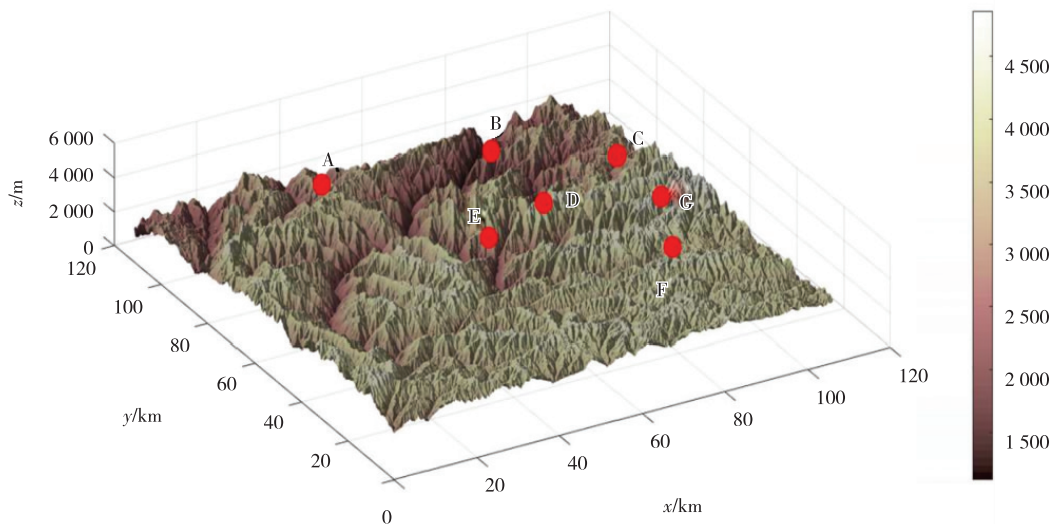


图 1 震区地貌和目标区域位置示意图

Fig. 1 Schematic diagram of earthquake topography and target area

表 1 S 集中海拔低于 3 km 的巡查点相关数据

Tab.1 Data of survey points with concentration of S below 3 km

目标区域点	10 km 内可巡查点总数	有效巡查点总数	比例/%	目标区域点	10 km 内可巡查点总数	有效巡查点总数	比例/%
A	275 625	69 993	25	E	275 100	145 987	53
B	205 275	161 848	79	F	275 625	0	0
C	242 025	95 247	39	G	275 625	970	1
D	275 625	72 888	26				

由上述可知,目标区域 A,B,C,D,E 这 5 个区域内均有海拔 3 km 以下的巡查分布点,而 F,G 两个目标区域分布在地震实测区域东南侧的高地处,且海拔大多数高于 3 km,不在题设条件下,故只需对 A,B,C,D,E 这 5 个目标区域内的航径规划优化研究。

3.2 实例求解及分析

采用蚁群算法,对问题进行求解。最终得到 A~G 目标区域的巡查航线、有效探测点数和覆盖率,任务规划结果见表 2。

表 2 任务规划结果

Tab.2 Task planning results

目标区域	低于 3 km 的巡查点数	有效巡查点数	覆盖率/%	巡查航径	目标区域	低于 3 km 的巡查点数	有效巡查点数	覆盖率/%	巡查航径
A	89 798	69 993	77.94	H—A—H	E	156 337	145 987	93.37	H—E—D—H
B	190 639	161 848	84.90	H—B—H	F	0	0	0.00	
C	109 770	95 247	86.76	H—C—D—H	G	0	0	0.00	
D	83 723	72 888	87.05	H—C—D—H H—E—D—H	合计	630 267	545 963	86.62	

利用 Matlab 编程实现,得到 A,B,C,D,E 不同区域无人机飞行的内部航径图,见图 2~图 6。

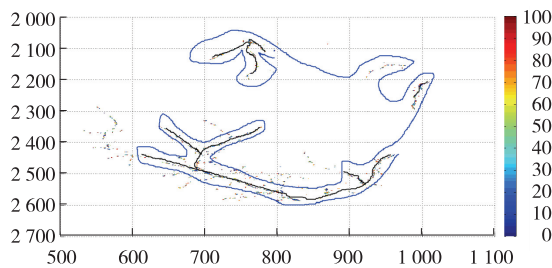


图 2 A 区域内部无人机飞行的航径
Fig.2 Flight path map of uav in region A

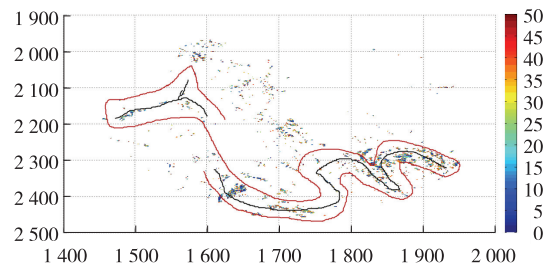


图 3 B 区域内部无人机飞行的航径
Fig.3 Flight path map of the uav in region B

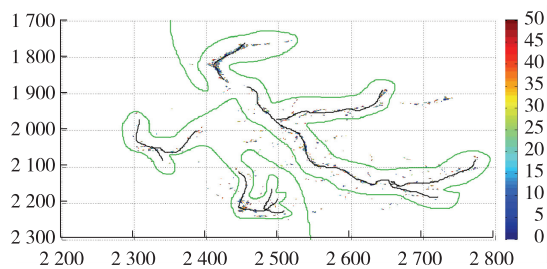


图 4 C 区域内部无人机飞行的航径
Fig.4 Flight path map of the uav in region C

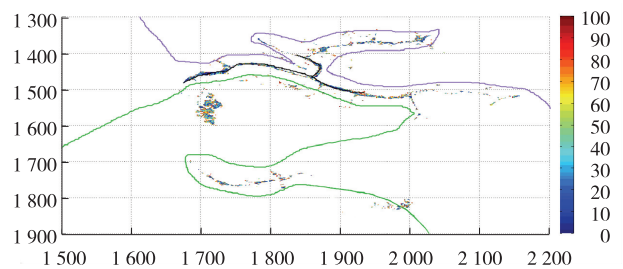


图 5 D 区域内部无人机飞行的航径
Fig.5 Flight path map of the uav in region D

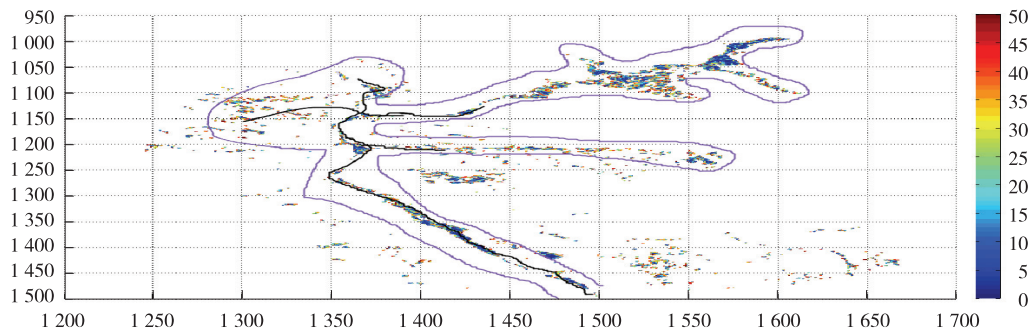


图 6 E 区域内部无人机飞行的航径

Fig. 6 Flight path map of the uav in region E

从图 2~图 6 可知,A,B,C,D,E 目标区域所有可探测高度下巡查点的散点分布图,其中如上图蓝线所示为 A 区域内部选取的飞行航径;如上图红线所示为 B 区域内部选取的飞行航径;如上图绿线所示为 C 区域内部选取的飞行航径;如上图紫线所示为 E 区域内部选取的飞行航径;而对于 D 区域是由巡查完 C 区域的无人机再沿着绿线进入 D 区域进行巡查,与此同时,由巡查完 E 区域的无人机沿着紫线进入 D 区域进行巡查,直到 D 区域所有有效巡查点巡查完毕,即 D 区域内部选取的飞行航径如上图紫线和绿线组合所示。

综上所述,当最少需要 4 架无人机巡查对目标区域进行巡查时,此时覆盖率最大,即为 86.62%。

4 结论

本文综合考虑了无人机受到实际飞行时间和飞行航程的限制,建立了以无人机使用量最少、巡查覆盖率为最大为目标的双目标优化模型,研究了突发事件发生后,无人机任务分配和航迹规划的问题,并且将蚁群算法应用到无人机航迹规划问题中,实现了无人机巡查的最大覆盖。此外,通过仿真模拟给出了目标区域无人机内部飞行航径图,体现了任务分配和航迹规划的合理性和科学性,为应急管理以及抢险救灾的决策提出科学合理的建议。

参考文献:

- [1] HARDER R W. A Java universal vehicle router in support of routing unmanned aerial vehicles air missions[D]. Ohio: Air Force Institute of Technology,2000.
- [2] KEVIN P O. Dynamic unmanned aerial vehicle routing with a java-encoded reactive tabu search metaheuristic[D]. Ohio: Air Force Institute of Technology,1999.
- [3] BROWN D T. Routing unmanned aerial vehicles while considering general restricted operating zones[D]. Ohio: Air Force Institute of Technology,2001.
- [4] 韩攀,陈谋,陈哨东,等. 基于改进蚁群算法的无人机航迹规划[J]. 吉林大学学报(信息科学版),2013,31(1):66-72.
HAN P, CHEN M, CHEN S D, et al. Path planning for UAVs based on improved ant colony algorithm[J]. Journal of Jilin University (Information Science Edition), 2013, 31(1):66-72.
- [5] 韩玉龙,高武,杨士锋,等. 基于蚁群算法的多 UAV 协同侦察任务规划模型及求解[C]//王兆魁. 空天资源的可持续发展:第一届中国空天案例会议论文集. 北京:科学出版社,2015.
HAN Y L, GAO W, YANG S F, et al. Model and solution of cooperative reconnaissance mission planning for multi-UAVs based on ant colony optimization[C]//WANG Z K. Proceedings 1st Chinese Aerospace Safety Symposium (CASS 2015). Beijing: Science Press, 2015.
- [6] 罗贺,王国强,胡笑旋,等. 基于 Agent 的多无人机任务分配模型[J]. 火力与指挥控制,2014,39(7):22-26.
LUO H, WANG G Q, HU X X, et al. Task allocation model for multi UAVS based on agents[J]. Fire Control & Command Control, 2014, 39(7):22-26.
- [7] 叶媛媛,闵春平,沈林成,等. 基于 VORONOI 图的无人机空域任务规划方法研究[J]. 系统仿真学报,2005,17(6):1353-1355.
YE Y Y, MIN C P, SHEN L C, et al. VORONOI diagram based spatial mission planning for UAVs[J]. Journal of System Simulation, 2005, 17(6):1353-1355.
- [8] 席庆彪,杨述星,张帅,等. 基于 A* 算法的无人机地面目标跟踪[J]. 火力与指挥控制,2017,42(3):25-28.
XI Q B, YANG S X, ZHANG S, et al. Ground target tracking base on A* algorithm for unmanned aerial vehicles[J]. Fire Control & Command Control, 2017, 42(3):25-28.
- [9] 赵晨皓,刘永兰,赵杰. 一种基于 PEGA 算法的 UAV 区域覆盖搜索路径规划方法[J]. 科技导报,2014,32(28/29):85-90.
ZHAO C H, LIU Y L, ZHAO J. Path planning method of

- UAV area coverage searching based on PEGA[J]. *Technology Review*, 2014, 32(28/29): 85-90.
- [10] 龙国庆, 祝小平, 董世友. 基于聚类算法的多无人机系统任务分配[J]. *火力与指挥控制*, 2011, 36(12): 54-59.
- LONG G Q, ZHU X P, DONG S Y. A study on the task allocation problem for multi-UAV system based on clustering algorithm[J]. *Fire Control & Command Control*, 2011, 36(12): 54-59.
- [11] 朱颖东, 孙振, 吴迪, 等. 基于改进蚁群算法的移动机器人路径规划[J]. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2016, 28(6): 849-855.
- ZHU H D, SUN Z, WU D, et al. Path planning for mobile robot based on improved ant colony algorithm[J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition)*, 2016, 28(6): 849-855.
- [12] DORIGO M. The ant system: optimization by a colony of cooperating agent [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part B*, 1996, 26(3): 29-41.

Operations Research and Cybernetics

Research on Optimization Model of UAV Mission Planning Based on Ant Colony Algorithm

JIANG Sha, LIU Xuewen, YE Jiajun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] In order to study the route optimization of UAV in disaster patrol. [Methods] An ant colony algorithm is designed to solve this problem, which is verified by a simulation example. [Findings] The optimization of uav flight path is a complex task planning problem with multiple constraints. Taking the time-effectiveness and equalization as the core evaluation system into consideration, a dual-objective optimization model is constructed to achieve the reasonable allocation of uav external and internal flight path optimization. [Conclusions] The simulation results demonstrate that the proposed model and algorithm have a certain value in solving flight path filed problem of the UAV in the disaster inspection.

Keywords: disaster inspection; mission planning; inspection point; ant colony algorithm; flight path

(责任编辑 黄 颖)

绩效评价中最优基础工作量的研究*

李茜婷, 陈培章, 赵克全

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究绩效分配中最优基础工作量问题。【方法】利用多目标优化工具。【结果】建立与基础工作量相关的分值转换模型、满意度模型,得到以最小化满意度差的平方和、最大化满意度和为目标的多目标优化模型,并利用遗传算法对此多目标优化模型求解。【结论】结果表明此多目标优化模型存在弱有效解,且是科学合理的。

关键词:最优基础工作量;多目标优化;分值转换;满意度

中图分类号: O221.6

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)01-0008-06

绩效分配是每个考核对象都十分关心的问题,它与考核对象的利益直接相关。最优绩效分配方案不仅与各级指标分值科学合理的聚合有关,还与考核对象的个体差异、满意度以及基础工作量等密切相关。一般地,总工作量包括两个部分,分别是基础工作量和绩效工作量。基础工作量即机构或组织为完成整体工作目标制定的各考核对象需要完成的最低工作量,不参与绩效分配;绩效工作量即总的工作量扣除基础工作量后剩余的工作量,通过一定转换后参与绩效分配。在绩效分配问题中基础工作量的确定是十分关键的问题,若基础工作量定得太低,则无法完成机构或组织制定的整体工作目标。若基础工作量定得太高,则大部分考核对象无法参与绩效分配。因此如何制定一个最优的基础工作量,使其既能够激励考核对象努力工作,使该考核对象的绩效分配最优,又能兼顾绩效分配的公平性是本文重点讨论的问题。

在查阅相关文献时,笔者注意到 Andrés 等人^[1]利用距离函数研究绩效分配问题。李志学等人^[2]研究绩效分配问题中的分值转换模型,并提出一类可以体现激励程度的分值转换函数。Marcenaro-Gutierrez 等人^[3]利用多目标优化模型研究西班牙劳动力市场中人们的满意度。赵耀华等人^[4]利用结构函数研究高校教师绩效分配的满意度函数。值得注意的是,目前很少有人通过最优基础工作量问题来研究绩效分配,受文献[1-4]的启发,本文将通过多目标优化工具来研究最优基础工作量问题。在研究最优绩效分配问题时主要考虑3方面的问题:首先科学合理地将绩效工作量转化成一个分值,该分值不仅要体现绩效分配方案对考核对象努力工作的肯定和鼓励,还要兼顾绩效分配制度的公平性;其次要考虑到考核对象对现行分配方案的整体满意程度;最后建立一个兼顾满意度和公平性的多目标优化模型,并求出最优的基础工作量制定方案。

1 预备知识

1.1 数据分类

在进行绩效考核时,由于每个考核对象可能会面对多个不同类别的考核指标,而每一个类别的考核指标会有不同的基础工作量,例如某些高校的医生在教学方面有一个基础工作量,在科研方面有一个基础工作量,在医院门诊等社会工作方面有一个基础工作量。鉴于不同考核对象对不同类别的考核指标有不同程度的倾向性或者优势,将对绩效分配和满意度产生较大影响,因此在开始研究最优绩效分配问题前,本文首先根据指标数据对考核对象进行分类。假定有 m 个考核对象, n 类考核指标,第 i 个考核对象第 j 类指标的工作量数据为 t_{ij} ($i=1,$

* 收稿日期:2018-05-09 修回日期:2018-12-15 网络出版时间:2019-01-09 7:37

资助项目:国家自然科学基金(No. 11671062);重庆市基础与前沿研究计划项目(No. cstc2015jcyjA00027)

第一作者简介:李茜婷,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:lxtcqu@foxmail.com;通信作者:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190109.0731.018.html>

$2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), 则第 i 个考核对象的工作量数据 t_{ij} 应包括 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}$ 。考虑到对考核对象分类的合理性与公平性, 按以下原则对考核对象进行分类。若

$$\frac{t_{ij_0}}{\sum_{i=1}^m t_{ij_0}} \geq \frac{t_{ij \neq j_0}}{\sum_{i=1}^m t_{ij \neq j_0}}, \quad (1)$$

则称第 i 个考核对象为第 j_0 型考核对象, $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。其中 t_{ij_0} 为第 i 个考核对象第 j_0 类指标工作量, $t_{ij \neq j_0}$ 为第 i 个考核对象非 j_0 类指标工作量, $\sum_{i=1}^m t_{ij_0}$ 为所有考核对象第 j_0 类指标工作量总和, $\sum_{i=1}^m t_{ij \neq j_0}$ 为所有考核对象非 j_0 类指标工作量总和。因此可由(1)式将每个考核对象进行分类。

1.2 弱有效解

考虑一般多目标优化问题(MOP) $_1 \min_{x \in \Omega} (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$, 其中 Ω 为多目标优化模型的可行域, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ 为 p 个目标。

定义 1^[5] 称 $\hat{x} \in \Omega$ 为的弱 Pareto 有效解, 若不存在 $x \in \Omega$ 使得对任意的 $i=1, 2, \dots, p$, 均有 $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ 。

引理 1^[6] 若存在 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 \hat{x} 是 ϵ -约束标量化问题

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \Omega} f_i(x), \\ & \text{s. t. } f_j(x) \leq \epsilon_j, \quad j=1, 2, \dots, p, \quad j \neq i, \quad \epsilon_j \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

的最优解, 则 \hat{x} 是(MOP) $_1$ 的弱有效解。

2 建立模型

2.1 建立分值转换模型

最优基础工作量的确定首先是要确保考核对象努力完成组织或机构制定的整体工作目标, 并对超额完成基础工作量的考核对象进行激励, 其次是在鼓励的同时要起到监督和保障公平的作用。由于不同类型指标的量纲可能不同, 不同量纲的数据不能直接计算或者比较, 因此本文引入分值转换模型对初始工作量进行转换, 转换成一个无量纲分值, 使得转换后的分值不仅可以直接计算比较, 还能同时实现激励、监督和保障公平的功能。考虑到现实意义, 初期绩效分配方案鼓励考核对象努力工作, 在完成基础工作量后工作量越大对考核对象的奖励越大, 但当考核对象工作量达到某个值时, 为了保证考核对象保质保量完成工作, 就要减小鼓励。为此本文采用对数形式的分值转换模型, 该转换模型能很好地描述当考核对象工作量超过基础工作量后对其采取的鼓励与监督的性质。分值转换模型如下:

$$g_{ij} = \lambda_{ij} \ln \frac{t_{ij}}{s_j}, \quad \lambda_{ij} = \begin{cases} 0, & t_{ij} < s_j \\ 1, & t_{ij} \geq s_j \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n,$$

其中 g_{ij} 表示第 i 个考核对象第 j 项指标绩效工作量的转换分值, s_j 为第 j 类指标的基础工作量。上述分值转换模型对不同类型的指标引入了不同的基础工作量, 取值范围为 $0 \leq s_j \leq \max t_{.j}$, 这里 $\max t_{.j}$ 为所有考核对象第 j 项指标工作量数据中的最大值, 其中 $t_{.j}$ 表示 i 分别取 $1, 2, \dots, m$ 时第 j 项指标的工作量。若 s_j 超过 $\max t_{.j}$, 则所有考核对象无法参与绩效分配, 分值转换均为 0。

基础工作量 s_j 的确定需要体现绩效分配的激励性与公平性。对第 i 个考核对象而言, 当其第 j 项指标的初始工作量 t_{ij} 小于基础工作量 s_j 时, 转换分值为 0, 此时考核对象未完成第 j 类型工作的基本工作量。当第 i 个考核对象第 j 项指标的初始工作量 t_{ij} 大于基础工作量 s_j 时, 转换分值为正数, 且随着 t_{ij} 的增加, 转换分值初始阶段会呈对数增长。当增大到一定量后, 转换分值的增加幅度会逐渐变缓, 从而避免了过度鼓励情况的发生, 同时有效督促考核对象认真负责完成自己的工作。因此该分值转换模型体现了绩效分配方案对考核对象的鼓励性与公平性。

2.2 建立满意度模型

在确定基础工作量时, 除了兼顾激励性与公平性, 还应考虑到考核对象对绩效分配的满意程度, 从而使制定

的绩效分配方案和基础工作量更为合理。令 $G_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}$, $G'_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}$, $i=1, 2, \dots, m$, 其中 G_i 为第 i 个考核对象所有指标转换分值之和, G'_{ij} 为所有考核对象所有指标转换分值总和。对第 i 个考核对象而言, 其满意程度与绩效分配比例 $\frac{G_i}{G'_{ij}}$ 有关, 对其最有利的与最不利的分配比例可分别表示为 $M_i = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{G_i}{G'_{ij}}$, $N_i = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{G_i}{G'_{ij}}$, $i=1, 2, \dots, m$ 。考虑到考核对象满意度的变化, 当分配比例 $k_i = \frac{G_i}{G'_{ij}}$ 增大, 考核对象的满意度增大, 且当分配比例 k_i 越大时, 考核对象的满意度越大, 因此满意度模型可以简单地理解为一个与分配比例有关的线性函数。为此, 本文采用如下形式的满意度模型: $h_i(k_i) = \frac{k_i - N_i}{M_i - N_i}$, 当 $k_i = M_i$ 时, 第 i 个考核对象的满意度为 1, 当 $k_i = N_i$ 时, 第 i 个考核对象的满意度为 0, 当 k_i 越接近 M_i 时, 满意度函数 $h_i(k_i)$ 的值越高, 反之越低。

2.3 建立双目标优化模型

综合考虑绩效分配的鼓励性、公平性, 以及考核对象的满意程度, 本文建立了以所有考核对象的总体满意度的最大化和考核对象的满意度尽可能均衡为目标的多目标优化模型, 见模型:

$$\begin{aligned} (\text{MOP})_2 \min f_1 &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} [h_i(k_i) - h_j(k_j)]^2, \\ \max f_2 &= \sum_{i=1}^m h_i(k_i), \\ \text{s. t. } &0 \leq s_j \leq \max t_j, \quad j=1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

其中 f_1 为任意两个考核对象满意度差的平方和, f_2 为所有考核对象满意度和。

下面将对多目标优化模型 $(\text{MOP})_2$ 弱有效解的存在性进行研究。

定理 1 在可行域中, 多目标优化模型 $(\text{MOP})_2$ 存在弱有效解。

证明 根据 ε -约束法, 将模型 $(\text{MOP})_2$ 转化为如下模型:

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_1 \min f_1 &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} [h_i(k_i) - h_j(k_j)]^2, \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{i=1}^m h_i(k_i) \geq \varepsilon, \\ 0 \leq s_j \leq \max t_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

取 $\varepsilon \leq \min \sum_{i=1}^m h_i(k_i)$, 则 $\min \sum_{i=1}^m h_i(k_i) \geq \varepsilon$ 自然成立。模型 $(\text{SOP})_1$ 可等价转化为如下模型:

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_2 \min f_1 &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} [h_i(k_i) - h_j(k_j)]^2, \\ \text{s. t. } &0 \leq s_j \leq \max t_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

因为满意度函数 $h_i(k_i) = \frac{k_i - N_i}{M_i - N_i}$ 为线性函数, 且 $h_i(k_i)$ 的函数值属于 $[0, 1]$, 所以 $h_i(k_i)$ 连续且有界, 故

$\sum_{1 \leq i < j \leq m} [h_i(k_i) - h_j(k_j)]^2$ 连续。又因可行集显然为有界闭集, 因此模型 $(\text{SOP})_2$ 存在最优解, 由引理 1 可知, 模型 $(\text{MOP})_2$ 存在弱有效解。 证毕

3 数值实验

为便于计算, 本章取 $m=100, n=3$ 。以医生工作为例, 令 s_j 表示基础工作量, 其中 $j=1$ 代表科研, $j=2$ 代表教学, $j=3$ 代表社会工作。因此可以将这 100 个医生按照 (1) 式归于以上 3 个类型之中。随机产生 100 个医生工作量数据见表 1, 将数据代入 $(\text{MOP})_2$ 并用遗传算法求解, 得到的数据见表 2 和表 3。

令 $F=(f_1, f_2)$, 表 3 为与表 2 相对应的数据。 f_1 为第 1 个目标的值, 即满意度差的平方和, f_2 为第 2 个目标的值, 即满意度和。 F 前沿面即多目标优化 $(\text{MOP})_2$ 的弱 Pareto 有效解, 见图 1。

表 1 100 个医生工作量数据
Tab.1 100 doctor workload data

工作量	指标			工作量	指标			工作量	指标		
	科研	教学	社会工作		科研	教学	社会工作		科研	教学	社会工作
1	597	815	2 089	35	710	1 373	1 576	69	689	1 464	1 894
2	919	999	1 774	36	794	804	2 367	70	481	1 499	2 052
3	416	822	2 325	37	674	988	1 616	71	517	820	2 240
4	397	1 258	2 184	38	525	1 092	2 019	72	329	813	1 783
5	648	1 379	1 582	39	635	1 022	1 363	73	567	1 266	2 480
6	364	1 037	2 414	40	582	1 283	2 225	74	959	1 474	1 699
7	806	1 193	1 807	41	310	1 240	1 357	75	733	1 465	1 897
8	684	1 419	1 710	42	568	1 203	1 387	76	594	819	2 313
9	439	1 247	1 796	43	814	1 386	2 298	77	896	1 310	1 504
10	848	1 034	1 312	44	485	1 403	2 075	78	966	1 081	1 919
11	923	953	1 997	45	792	820	1 695	79	691	932	2 129
12	333	1 292	1 819	46	808	840	2 212	80	674	976	1 916
13	751	994	1 700	47	328	1 314	2 133	81	610	1 011	2 368
14	887	1 322	2 240	48	510	991	1 400	82	414	1 297	2 220
15	634	1 435	2 441	49	419	1 468	2 032	83	457	1 282	2 247
16	878	1 117	2 037	50	588	1 333	1 470	84	484	1 096	1 549
17	966	1 200	1 793	51	916	818	1 965	85	950	861	2 291
18	304	1 127	2 027	52	520	955	2 067	86	794	1 209	1 985
19	494	1 286	1 887	53	852	1 347	2 369	87	384	1 287	1 708
20	972	1 448	1 982	54	410	1 134	2 034	88	815	1 068	1 964
21	859	1 378	1 682	55	676	1 182	2 386	89	978	1 135	1 410
22	612	1 354	2 192	56	653	1 307	2 024	90	752	945	2 309
23	390	1 025	1 855	57	557	1 102	2 110	91	786	849	2 478
24	668	1 123	2 102	58	396	924	1 912	92	929	1 293	1 641
25	733	1 279	2 451	59	817	930	1 428	93	872	823	1 513
26	363	978	2 215	60	641	1 243	2 499	94	641	1 124	2 452
27	622	1 480	1 319	61	919	850	1 955	95	545	855	1 692
28	385	1 045	2 053	62	644	1 377	1 957	96	447	1 450	2 440
29	399	1 051	1 575	63	561	1 134	1 464	97	345	1 314	2 104
30	597	1 070	2 307	64	721	904	1 801	98	310	1 093	1 926
31	493	1 473	2 482	65	498	1 443	1 857	99	924	1 094	1 442
32	475	1 383	1 668	66	620	935	1 316	100	866	1 248	1 581
33	423	1 257	2 385	67	872	1 076	2 211				
34	542	1 265	1 414	68	858	1 467	1 374				

表 2 基础工作量弱有效解

Tab. 2 Weak effective solution of basic workload

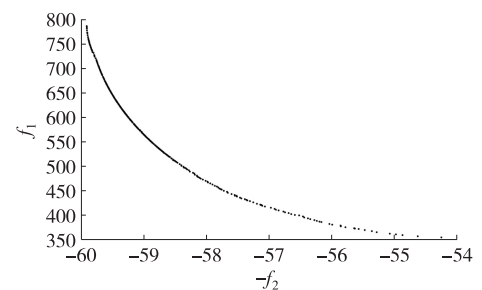
基础工作量	指标		
	s_1	s_2	s_3
1	526.00	959.74	1 659.53
2	518.01	945.55	1 637.35
3	496.81	955.03	1 612.99
4	495.00	953.41	1 598.89
5	487.95	950.98	1 598.10
6	493.38	932.12	1 582.59
7	492.78	946.37	1 540.30
8	487.00	950.87	1 520.52
9	487.79	950.78	1 499.91
10	482.46	907.81	1 576.04
11	472.76	941.01	1 497.06
12	473.78	936.44	1 486.09
13	485.55	940.47	1 458.09
14	471.93	920.16	1 487.33
15	472.81	923.22	1 468.19
16	473.45	916.56	1 449.65
17	477.17	893.50	1 471.76
18	477.28	906.68	1 434.97
19	467.84	911.37	1 422.13
20	465.27	918.48	1 402.12

表 3 F 值Tab. 3 F value

目标值	目标	
	f_1	f_2
1	356.72	54.26
2	359.06	54.64
3	361.44	54.88
4	362.90	54.99
5	364.36	55.09
6	367.33	55.29
7	369.49	55.37
8	371.78	55.48
9	373.99	55.58
10	375.47	55.65
11	377.47	55.79
12	379.31	55.87
13	381.03	55.87
14	382.77	56.00
15	384.20	56.05
16	388.16	56.18
17	390.50	56.25
18	392.11	56.29
19	393.99	56.35
20	395.64	56.39

4 结论

表 2 为求得的最优基础工作量 s_j 的弱有效解,为了简便,此处任意选取 20 组弱有效解的数据。表 3 为与表 2 相对应的 F 弱 Pareto 前沿面的值,即 f_1 与 f_2 的值。由图 1 可以直观得出 2 个结论:1)满意度集中在 55%以上。2)从图中可以看出图 1 是一条比较光滑的曲线,它从一定程度上反映了分值转换模型、满意度模型的合理性。由表 2 和表 3 的数据知:决策者可以通过表 3 中的满意度去选择对应的基础工作量,也可以通过制定的基础工作量来预期考核对象的整体满意度。并且由表 3 的满意度 f_2 数据可知,满意度之间的差异非常小,因此可任意选择表 2 中的一组数据作为最优基础工作量,在选择时只需要考虑满意度的均衡性,即 f_1 即可。

图 1 F 弱 Pareto 前沿面Fig. 1 F weak Pareto frontier

参考文献:

- [1] ANDRÉS R D, GARCIA-LAPRESTA J L, GONZÁLEA-PACHÓN J. Performance appraisal based on distance function methods [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 207(3):1599-1607.
- [2] 李志学,王平心. 建立公平绩效评价的分值转换模型研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(3):126-130.

- LI Z X, WANG P X. On the model of performance evaluation to establish a fair incentive system[J]. Chinese Journal of Management Science, 2005, 13(3): 126-130.
- [3] MARCENARO-GUTIERREZ O D, LUQUE M, RUIZ F. An application of multiobjective programming to the study of workers' satisfaction in the Spanish labour market[J]. Economic Working Papers at Centro De Estudios Andaluces, 2007, 203(2): 430-443.
- [4] 赵耀华, 韩之俊. 基于结构方程的高校顾客满意度模型[J]. 系统工程, 2007, 25(11): 85-90.
- ZHAO Y H, HAN Z J. The customer satisfaction model of university based on structural equation[J]. Systems Engineering, 2007, 25(11): 85-90.
- [5] 林铨云, 董家礼. 多目标最优化的方法与理论[M]. 吉林: 吉林教育出版社, 1992.
- LIN C Y, DONG J L. The method and theory of multiobjective optimization[M]. Jilin: Jilin Education Publishing House, 1992.
- [6] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [7] 胡毓达. 多目标决策[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2010.
- HU Y D. Multi-objective decision[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 2010.
- [8] CHANKONG V, HAIMES Y. Multiobjective decision making: theory and methodology[M]. New York: Elsevier Science Publishing Co, 1983.

Operations Research and Cybernetics

Research on the Optimal Basic Workload in Performance Evaluation

LI Xiting, CHEN Peizhang, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The optimal basic workload in performance allocation is studied. [Methods] The multi-objective optimization tool is used to establish the score conversion model and the satisfaction model related to the basic workload. [Findings] The multi-objective optimization model is obtained to minimize the sum of squares of difference of satisfaction and maximize the sum satisfaction, and it is solved by genetic algorithm. [Conclusions] The results show that the multi-objective optimization model has a weak effective solution and is scientific and reasonable.

Keywords: optimal basic workload; multi-objective optimization; score conversion; satisfaction

(责任编辑 陈 乔)

基于演化博弈的制造业金融化调控机制研究*

张保帅¹, 沈坤平², 田盈¹, 赖革¹

(1. 重庆师范大学 经济与管理学院, 重庆 401331; 2. 重庆城市管理职业学院 工商管理学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】随着中国金融发展的不断深化及经济金融化水平不断提高,金融业利润明显超过制造业,导致资金流出实体经济,这就形成虚高的资产价格,产生“资产”泡沫,严重的还会引起制造业“空心化”。因此,通过深入研究制造业企业金融化问题,以此为基础探讨对中国产业结构调整优化的策略。【方法】运用演化博弈和模拟仿真的方法,构建基于政府和制造业企业金融化的演化博弈分析框架,重点分析影响政府和制造企业策略选择的因素,并对演化均衡过程进行模拟仿真。【结果】地方政府对制造业企业所采取措施譬如加大额外收费、提高奖励等力度的大小是制造业企业金融化水平的关键,制造业企业的决策行为一方面根据地方政府的额外收费和奖励的力度大小来定,同时制造业企业的行为反过来也影响地方政府的政策选择。【结论】基于适当政策下的演化博弈构建的制造业金融化调控机制可以最终实现经济系统的帕累托均衡。

关键词:演化博弈;制造业金融化;调控机制

中图分类号:O225;F832.4

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)01-0014-07

经过近几十年的发展,中国已经成为世界上制造业产出最大的国家。但从整体来讲,中国制造业的优势主要体现在较低的劳动力成本、资源成本等,而随着劳动力红利的终结、环境的恶化,中国制造业受到了前所未有的压力,制造企业主营业务利润下滑,依靠低价获得市场份额的方式难以为继。与制造业形成鲜明对比的是,随着中国金融发展的不断深化,中国经济金融化水平不断提升,金融业利润水平明显超过制造业^[1]。因此,部分制造企业开始逐步参与金融投资,制造企业的金融资产以及利润来源占比不断提升,于是中国制造企业开始出现金融化趋势。然而,根据欧美发达国家的发展经验,一方面企业金融化可以为制造业发展提供廉价的资本,引导资源合理配置;另一方面由于资本是逐利的,随着制造业企业金融化水平提高,非制造业业务利润水平超过主营业务,会导致资金从制造业流向非制造业,进而形成虚高的资产价格,产生“资产”泡沫,严重的还会引起制造业“空心化”。虽然中国制造业金融化程度目前没有达到欧美国家水平,但是考虑到制造业在国民经济中的地位应该给予重点关注。制造业金融化的内在机理是什么?政府在制造业金融化过程中的控制方向是什么?控制途径是什么?所有这些问题对于正在寻求转型升级的中国制造业尤其是实现“中国制造2025”的目标都具有重要的现实意义。

1 文献综述

制造业金融化可以理解为制造企业行为尤其是经营行为越来越倾向于金融投资的过程或趋势的现象^[2]。国外学者对制造业企业金融化研究主要集中在3个方面:对制造业企业金融化的内涵与水平的研究,从资产、收益、分配等几个方面探讨制造企业金融化现象^[3-7];对制造业金融化产生原因的研究,认为资本的过度积累、激烈竞争以及实体投资收益率的下降是制造业金融化的主要原因^[8-9];对制造业金融化效果的研究,一种观点认为制造业金融化可降低制造企业的经营风险,为企业带来更高的投资收益率^[10],而大部分观点认为制造业金融化对实体经济具有“挤出效应”^[11]。

国内学者20世纪90年代开始关注金融化问题。翟连升最早对企业资产金融化现象进行了简要分析^[12]。

* 收稿日期:2018-09-20 修回日期:2018-10-25 网络出版时间:2019-01-09 7:38

资助项目:国家社会科学基金(No. 18BJY093);重庆市教育委员会科技项目(No. KJQN201800513;No. KJ1500340);重庆师范大学基金项目(No. 16XYY26);重庆市教育委员会人文项目(No. 17SKG037);教育部人文项目(No. 15YJCZH075);重庆市社科规划项目(No. 2018PY74)

第一作者简介:张保帅,男,副教授,博士,研究方向为金融经济及管理,E-mail:baoshuai8128@163.com;通信作者:沈坤平,女,讲师,E-mail:26985420@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190109.0731.038.html>

后继的研究主要从微观角度运用企业财务数据研究企业金融化问题^[13-14]。也有探讨实业投资与金融投资关系的^[15-17]。还有从经济政策的不确定性对企业金融化的影响方面展开研究^[18]。对制造业金融化的研究则涉及不多,主要集中在实证检验中国制造业金融化行为的影响因素^[19-20]、制造业金融化行为对企业创新的影响^[21-23]。

综上,目前已有文献从宏观经济角度和行业角度研究企业金融化现象较多,且主要集中在财务方向;从企业微观角度的研究相对较少,而对制造业金融化的研究更是鲜有涉及,尤其政府对制造业金融化管控研究的更少之又少。因此,文章在现有研究基础上,依据演化博弈基本思想,创新性地构建政府对制造业企业金融化调控机制,重点分析影响政府和制造企业策略选择的因素,构建基于不同策略下博弈双方的复制动态方程,进而求得演化博弈的稳定策略,同时以实现这些稳定性的条件来分析政府和制造企业之间的行为关系,最后对演化均衡过程进行了模拟仿真。

2 制造业金融化演化博弈模型构建及分析

2.1 演化博弈在制造业金融化分析中的框架设定

演化博弈是指在有限理性和学习能力的假设下,用动态的框架来分析一定规模的群体反复博弈的均衡问题,该理论能准确的捕捉到系统的发展变化。制造企业和政府代表两个不同利益的市场主体,具体行为的动态变化速度可描述为:

$$\frac{dx}{dt} = x[u(k, s) - u(s, s)], k = 1, 2, 3, \dots, K. \quad (1)$$

(1)式中, $u(k, s)$ 为采用策略 k 时的适应度, $u(s, s)$ 为平均适应度, k 为不同的策略, K 为策略集。将(1)式简记为 $F(x) = \frac{dx}{dt}$,则演化博弈的稳定策略的均衡条件为:1) $F(x) = \frac{dx}{dt} = 0$;2) $F'(x) < 0$ 。根据这两个均衡条件可求出演化稳定策略(Evolutionary stable strategy, ESS)。

2.2 基本假设和模型建立

制造业金融化的内在机理在于实体资本的脱实入虚,使得制造业利润的来源脱离了生产和交换,它反映了制造企业从生产行为向非生产行为变化的过程。调控机制的基本功能是促进区域经济系统中制造业的良性发展。因此,为了分析演化博弈双方的相互作用行为以及可能出现的均衡稳定状态,做出以下假设。

假设 1 整个演化博弈系统存在政府和制造企业两个主体。政府可选择的策略为调控或不调控,制造企业可选择的策略为参与投机或专注生产。

假设 2 在既定的经济系统中,制造企业退出投机和参与生产是同时实现。

假设 3 演化博弈双方的博弈行为都是有限理性的,每一方的博弈策略都是依据对方的策略构建自己的策略选择。

假设 4 专注生产的制造企业占比为 P ,则参与金融投机的制造企业比重为 $1 - P$,政府进行调控的可能性为 Q ,而政府不作为的可能性为 $1 - Q$,另外定义大量制造企业专注生产的经济社会为实业经济,大量制造业参与投机的经济为泡沫经济。

在上述假设下,进一步对影响博弈双方支付函数的变量进行设定。专注生产制造企业的总利润为 A ,参与金融投机的制造企业总利润为 B ,政府鼓励制造企业从事专业生产的奖励为 J_E ,政府对制造企业偏离主业所征收的额外费用,也可以理解为制造企业从事金融投机的成本为 C_1 。政府的收益主要来自制造业的税收,制造企业专注生产时的税收为 $T_1 = Ar$;制造企业参与投机时的税收为 $T_2 = Br$ 。其中, r 为制造企业综合税率,奖励性收支 J ,主要包括中央政府对地方政府的转移支付和地方政府对制造企业的奖励支出 $J_d = \gamma J_z$,其中 $\gamma \in (0, 1)$, d 表示地方, z 表示中央;政府对参与金融投机的制造企业的额外收费为 $W = C_1 = \omega B$,政府在对制造企业实施调控过程中(比如检查、报表核对等)所产生的调控成本 C_2 ,还有由于制造业金融化所引起的失业、产业结构失衡造成的社会治理成本 C_3 。那么根据博弈活动所获得的收益为决策标准,最终可得到支付矩阵(见表 1)。

表 1 不同策略下博弈主体的支付矩阵

Tab. 1 Payment matrix of game players under different strategies

政府	制造企业	
	专注生产 P	参与投机 $1 - P$
调控 Q	$Q_G = Ar + (1 - \gamma)J_z - C_2$ $Q_E = A(1 - r) + \gamma J_z$	$Q_G = Br + J_z + \omega B - C_2 - C_3$ $Q_E = B(1 - r) - \omega B$
不调控 $1 - Q$	$Q_G = Ar + J_z$ $Q_E = A(1 - r)$	$Q_G = Br - C_3$ $Q_E = B(1 - r) - \omega B$

2.3 制造业金融化行为演化稳定分析

2.3.1 期望函数构建 首先根据上文的支付矩阵,推演出制造企业生产行为的期望函数为:

$$E_{\text{专注生产}} = Q[A(1-r) + \gamma J_z] + (1-Q)A(1-r), \quad (2)$$

制造企业投机行为的期望函数为:

$$E_{\text{参与投机}} = Q[Q(1-r) - \omega B] + (1-Q)B[1-r-\omega], \quad (3)$$

制造企业的预期平均期望函数为:

$$E_{\text{制造企业}} = PE_{\text{专注生产}} + (1-P)E_{\text{参与投机}}. \quad (4)$$

那么,制造企业行为的复制动态方程为:

$$F(P) = \frac{dP}{dt} P [E_{\text{专注生产}} - E_{\text{制造企业}}] = P(1-P)[Q\gamma J_z + A(1-r) - B(1-r-\omega)]. \quad (5)$$

同理,推导出政府调控行为的期望函数为:

$$E_{\text{调控}} = P[Ar + (1-\gamma)J_z - C_2] + (1-P)[Br + J_z + \omega B - C_2 - C_3], \quad (6)$$

政府不调控行为的期望函数为:

$$E_{\text{不调控}} = P[Ar + J_z] + (1-P)[Br - C_3], \quad (7)$$

政府的预期平均期望函数为:

$$E_{\text{政府}} = QE_{\text{调控}} + (1-Q)E_{\text{不调控}}, \quad (8)$$

则政府行为的复制动态方程为:

$$F(Q) = \frac{dQ}{dt} Q [E_{\text{调控}} + E_{\text{不调控}}] = Q(1-Q)[PJ_z - P\gamma J_z - P\omega B + J_z + \omega B - C_2]. \quad (9)$$

2.3.2 演化稳定策略分析 1) 制造企业的行为演化稳定分析。根据上文提到的演化稳定策略性质可知,当 $F(P)=0, F'(P)<0$ 时,解出来的 P^* 就可能是该演化博弈的均衡点,那么存在 3 个可能稳定的均衡点: $P^*=0$ (制造企业参与投机)、 $P^*=1$ (制造企业专注生产) 以及 $Q^* = \frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}$ 。而制造企业的演化行为取决于 Q , 其中 Q^* 为临界点。下面具体分析 Q^* 左右区间的演化状态。

首先,当 $Q = \frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}$ 时,总有 $F(P)=0, F'(P)=0$, 也就是所有的纵轴都是稳定状态; 当政府的调控力度达到 $Q = \frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}$, 制造企业专注生产的可能性都是稳定的。在这种状态下,制造企业无论是专注生产还是参与投机比重 P 为多少,政府和制造企业都能保持比较稳定的状态,但是这个稳定的均衡状态的位置受制造企业的净利润以及政府对制造企业专注生产的奖励决定。

其次,当 $Q < \frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}$ 时,对 $P^*=0, P^*=1$ 有 $F'(0)<0, F'(1)>0$, 而 $P^*=0$ 时,该博弈的演化均衡策略,意味着政府的调控强度达不到一定程度,并呈下降趋势时,制造企业专业生产概率逐步降低,参与金融投机是制造企业的最优选择。

最后,当 $Q > \frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}$ 时,对 $P^*=0, P^*=1$, 有 $F'(0)>0, F'(1)<0$, 而 $P^*=1$ 时,该博弈的演化均衡策略意味着政府的调控强度达到一定程度,并呈上升趋势时,制造企业专业生产概率逐步增大,专注生产是企业的最优选择。

2) 政府调控行为演化稳定分析。同理,当 $F(Q)=0, F'(Q)<0$ 时,解出来的 Q^* 就可能是该演化博弈的均衡点,那么存在 3 个可能稳定的均衡点: $Q^*=0$ (不调控)、 $Q^*=1$ (调控) 以及 $P^* = \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}$ 。而制造企业的演化行为取决于 P , 其中 P^* 为临界点。下面具体分析 P^* 左右区间的演化状态。

首先,当 $P = \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}$ 时,总有 $F(Q)=0, F'(Q)=0$, 也就是所有的纵轴都是稳定状态; 当制造企业专注生产的力度达到 $P = \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}$ 时,政府调控的可能性都是稳定的。在这种状态下,政府调控的比重 Q 无论为多少,政府和制造企业都能保持比较稳定的状态,但是这个稳定的均衡状态的位置受部分制造企业参与金

融投机的总利润、中央政府的奖励、地方政府的额外收费以及调控成本决定。

其次,当 $P < \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}$ 时,对 $Q^* = 0, Q^* = 1$,有 $F'(0) < 0, F'(1) > 0$,而 $Q^* = 0$ 时,该博弈的演化均衡策略意味着制造企业的专业生产强度达不到一定程度,并呈下降趋势时,政府调控的概率逐步降低,不调控是政府的最优选择。

最后,当 $P > \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}$ 时,对 $Q^* = 0, Q^* = 1$,有 $F'(0) > 0, F'(1) < 0$,而 $Q^* = 1$ 时,该博弈的演化均衡策略意味着制造企业的专注生产强度达到一定强度,并呈上升趋势时,政府调控的概率逐步增大,调控是政府的最优选择。

3) 地方政府与制造企业群体演化稳定分析。根据上述分析,政府和制造企业的动态复制行为可以描述为:

$$\frac{dP}{dt} = P(1-P)[Q\gamma J_z + A(1-r) - B(1-r-\omega)], \tag{10}$$

$$\frac{dQ}{dt} = Q(1-Q)[PJ_z - P\gamma J_z - P\omega B + J_z + \omega B - C_2]. \tag{11}$$

当整个系统达到均衡时,有 $F(P) = 0, F(Q) = 0$,进而可以解得 5 个均衡点: $E_1(0,0), E_2(0,1), E_3(1,0), E_4(1,1), E_5\left\{\frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}, \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}\right\}$ 。这里用一个二维的平面图来表示博弈双方的复制动态关系。

由图 1 可以看到, $E_1(0,0)$ 和 $E_4(1,1)$ 是演化稳定策略,其中 E_1 表示地方政府不采取调控行为且制造企业参与投机。 $E_4(1,1)$ 表示地方政府对制造企业金融化行为进行大力调控且制造企业积极进行专业生产。在图 1 的右上区域,政府和企业的博弈演化行为收敛于点 $E_4(1,1)$,换句话说整个演化系统的帕累托最优均衡点就是 $E_4(1,1)$ 。在图 1 的左下方区域,整个均衡收敛于 $E_1(0,0)$,该均衡点为整个演化系统的帕累托劣均衡。图 1 的其他均衡点由于收敛的方向不确定,具体可以分为以下几种情况。

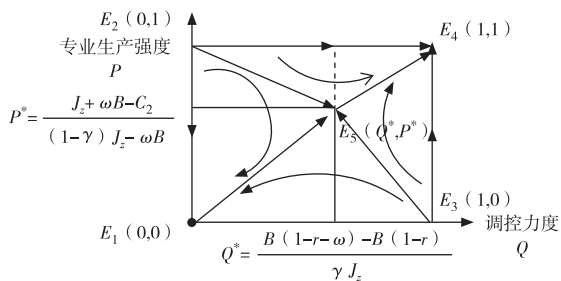


图 1 博弈双方群体博弈复制动态及稳定性示意图

Fig. 1 Schematic diagram of replication dynamics and stability in game theory

首先,如果整个演化系统以最大的可能性收敛于帕累托最优均衡点就是 $E_4(1,1)$,那么政府和制造企业的策略集应该落在图 1 的右上区域,也就是均衡点 E_5 。

$\left\{\frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}, \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}\right\}$ 右上方,这里要满足: $P > \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}, Q > \frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}$ 。

其次,在 $P^* = \frac{J_z + \omega B - C_2}{(1-\gamma)J_z - \omega B}$ 中,政府对制造企业参与金融投机的额外收费 ωB 、制造企业对中央政府的奖励的分成比例 γ 与 P^* 有正向关系,政府在对制造企业实施调控过程中(比如检查、报表核对等)所产生的调控成本 C_2 与 P^* 有反向关系。因此,加强对制造业金融化行为的额外收费,提高制造企业的奖励分成比例以及压缩政府的调控成本等手段,这样可以使 $P > P^*$,那么根据复制动态方程,地方政府的最佳策略选择就是加大调控力度。

最后,在 $Q^* = \frac{B(1-r-\omega) - A(1-r)}{\gamma J_z}$ 时,参与金融投机的制造企业的总利润与 Q^* 有正向关系,制造业专注生产的总利润、政府对制造企业参与金融投机的额外收费 ωB 、制造企业对中央政府的奖励的分成比例 γ 、中央政府的奖励 J_z 以及企业的综合税率 r 与 Q^* 有反向关系。因此,提高参与金融投机制造企业的利润、调整专注生产制造企业的利润、降低额外收费降低奖励以及分成比例、降低税率等方法,可以使 $Q > Q^*$,那么根据制造企业的复制动态方程,这时制造企业的最优选择是专注生产。

综合上面的分析,在博弈双方策略选择的概率存在于图 1 右上方区域时,地方政府和制造企业的最优策略自动收敛于 $E_4(1,1)$ 。

3 算例仿真

上文只是从数理模型角度分析了博弈双方的演化博弈行为,为了从更深层次分析博弈双方的策略选择过程,下面应用算例,并结合 Matlab 软件拟合不同初始状态下策略选择的动态演进过程。

假设博弈双方博弈支付矩阵的具体参数如下(单位:万元):专注生产制造企业的总利润为 $A=500$,参与金融投机的制造企业总利润为 $B=600$,制造企业综合税率 $r=0.3$,中央政府对地方政府的转移支付和地方政府对制造企业的奖励支出 $J_s=800$, $\gamma=0.8$,政府对参与金融投机的制造企业的额外收费为 $W=C_1=\omega B=600 \times 0.1=60$ 。政府在对制造企业实施调控过程中(比如检查、报表核对等)所产生的调控成本 $C_2=700$,那么博弈双方策略选择的动态演化过程如下。

首先,如果 $Q < 0.5$,这里选择 $Q=0.35$,那么制造企业博弈策略随时间动态演进的过程如图 2 所示。从图 2 可以看出,制造企业在专注生产的各策略集的初始概率下,制造企业专注生产的策略选择最终收敛于 0。换句话说,在地方政府的调控力度比较小的条件下,制造企业进行金融投机的概率比较大,其最终的选择是参与金融投机的策略。

其次,如果 $Q > 0.5$,这里选择 $Q=0.65$,那么制造企业博弈策略随时间动态演进的过程如图 3 所示。从图 3 可以看出,制造企业在专注生产的各策略集的初始概率下,制造企业专注生产的策略选择最终收敛于 1。换句话说,在地方政府调控力度比较大的条件下,制造企业专注生产的概率也比较大,其最终的选择是专注生产的策略。

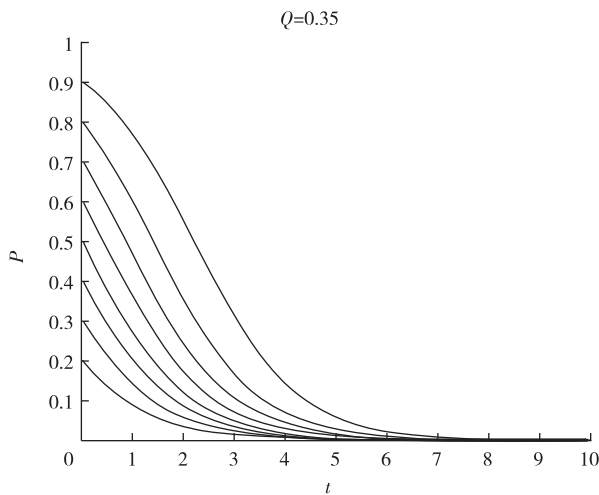


图 2 低调控力度下制造企业策略演化仿真

Fig. 2 Strategy evolution simulation of manufacturing enterprises under weak domination

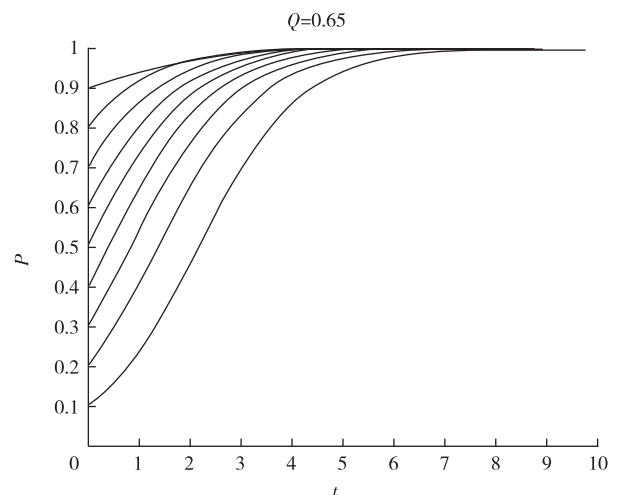


图 3 高调控力度下制造企业策略演化仿真

Fig. 3 Strategy evolution simulation of manufacturing enterprises under strong domination

从图 2、图 3 可以综合得出,在政府的高调控力度下,整个博弈系统的最终的稳定状态收敛于 $E_4(1,1)$ 。

4 结论

制造业的良性发展是一个国家经济发展的基石。本文依据演化博弈基本理论,构建基于政府和制造业企业金融化的演化博弈分析框架,重点分析影响政府和制造企业策略选择的因素,然后构建基于不同策略下博弈双方的复制动态方程,进而求得演化博弈的稳定策略,同时以实现这些稳定性的条件来分析政府和制造企业之间的行为关系,最后对演化均衡过程进行了模拟仿真。研究表明,地方政府对制造业企业所采取措施譬如加大额外收费、提高奖励等力度的大小是制造业企业金融化水平的关键,制造业企业的决策行为一方面根据地方政府的额外收费和奖励的力度大小来定,同时制造业企业的行为反过来也影响地方政府的政策选择。因此,如果政策设置得当,基于此演化博弈构建的制造业金融化调控机制可以最终实现经济系统的帕累托均衡。

参考文献:

- [1] 周蕾,余恕莲,史玉光. 中国制造业与金融业收入差距研究[J]. 财贸研究,2013,24(3):21-27.
ZHOU L, YU S L, SHI Y G. Research on income gap between China's manufacturing and financial industries[J]. Finance and Trade Research, 2013, 24(3): 21-27.
- [2] KRIPPNER G R. Capitalizing on crisis: the political origins of the rise of finance[M]. Cambridge: Harvard University Press, 2011.
- [3] CROTTY J. The effects of increased product market competition and changes in financial markets on the performance of nonfinancial corporations in the neoliberal era[D]. Amherst: University of Massachusetts Amherst, 2002.
- [4] KRIPPNER G. The financialization of the american economy[J]. Socio-Economic Review, 2005, 3(2): 173-208.
- [5] ÖZGÜR O. Financialization and capital accumulation in the nonfinancial corporate sector: a theoretical and empirical investigation on the US economy: 1973—2003[J]. Cambridge Journal of Economics, 2008, 32(6): 863-886.
- [6] DAVIS L E. Financialization and the nonfinancial corporation: investigation of firm-level investment behavior in the US, 1971—2011 [D]. Amherst: University of Massachusetts Amherst, 2013.
- [7] SEN S, DASGUPTA Z. Financialization and corporate investments: the indian case [J]. Social Science Electronic Publishing, 2015, 64(4): 844-853.
- [8] 马晨,冯志轩. 再工业化,还是再金融化?—危机后美国经济复苏的实质与前景[J]. 政治经济学评论, 2016, 7(6): 171-189.
MA C, FENG Z X. Reindustrialization or refinancialization: the nature and prospect of US economic recovery after the financial crisis[J]. China Review of Political Economy, 2016(6): 171-189.
- [9] DEMIR F. The rise of rentier capitalism and the financialization of real sectors in developing countries[J]. Review of Radical Political Economics, 2007, 39(3): 351-359.
- [10] DEMIR F. Financial liberalization, private investment and portfolio choice: financialization of real sectors in emerging markets[J]. Journal of Development Economics, 2009, 88(2): 314-324.
- [11] ÖZGÜR O. Financialization of the US economy and its effects on capital accumulation: a theoretical and empirical investigation[D]. Amherst: University of Massachusetts Amherst, 2006.
- [12] 翟连升. 企业资产金融化趋势简析[J]. 经济研究, 1992(5): 53-56.
ZHAI L S. A brief analysis of the trend of financial assets of enterprises[J]. Economic Research Journal, 1992(5): 53-56.
- [13] 王勇. 全球新工业革命还需产业金融推动[N]. 证券时报, 2016-09-22(A03).
WANG Y. The global new industrial revolution still needs industrial financial promotion[N]. Securities Times, 2016-09-22(A03).
- [14] 张慕濒, 诸葛恒中. 全球化背景下中国经济的金融化: 涵义与实证检验[J]. 世界经济与政治论坛, 2013(1): 122-138.
ZHANG M B, ZHU GE H Z. The globalization of China's financial economy: implications and empirical tests[J]. Economics and Politics, 2013(1): 122-138.
- [15] 刘立峰, 文君. 股市泡沫削弱了实业投资[J]. 中国投资, 2001(4): 29-31.
LIU L F, WEN J. The stock market bubble has weakened industrial investment[J]. China Investment, 2001(4): 29-31.
- [16] 张慕濒, 孙亚琼. 金融资源配置效率与经济金融化的成因—基于中国上市公司的经验分析[J]. 经济学家, 2014(4): 81-90.
ZHANG M B, SUN Y Q. The allocation efficiency of financial resource and the cause of economic and financialization: empirical study based on Chinese listed companies [J]. Economist, 2014(4): 81-90.
- [16] 吕云龙, 吕越. 制造业出口服务化与国际竞争力—基于增加值贸易的视角[J]. 国际贸易问题, 2017(5): 25-34.
LÜ Y L, LÜ Y. Servitization of manufacturing export and international competitiveness: based on the perspective of value added trade[J]. Journal of International Trade, 2017(5): 25-34.
- [17] 彭俞超, 韩珣, 李建军. 经济政策不确定性与企业金融化[J]. 中国工业经济, 2018(1): 137-155.
PENG Y C, HAN X, LI J J. Economic policy uncertainty and corporate financialization [J]. China Industrial Economics, 2018(1): 137-155.
- [18] 谢家智, 江源, 王文涛. 什么驱动了制造业金融化投资行为—基于A股上市公司的经验证据[J]. 湖南大学学报(社会科学版), 2014, 28(4): 23-29.
XIE J Z, JIANG Y, WANG W T. What drives financial investment in manufacturing industry: empirical evidence from A share listed companies[J]. Journal of Hunan University (Social Sciences), 2014, 28(4): 23-29.
- [19] 陈妍村, 干胜道. 我国制造业企业金融化趋势及其影响因素研究—基于企业生命周期视角[J]. 财会月刊, 2018(19): 7-14.
CHEN Y C, GAN S D. Research on the trend and influencing factors of China's manufacturing enterprises' finance: based on the perspective of enterprise life cycle[J]. Finance and Accounting Monthly, 2018(19): 7-14.

- [20] 谢家智,王文涛,江源. 制造业金融化、政府控制与技术创新[J]. 经济学动态,2014(11):78-88.
XIE J Z, WANG W T, JIANG Y. Manufacturing finance, government control and technological innovation[J]. *Economic Perspectives*, 2014(11):78-88.
- [21] 王红建,曹瑜强,杨庆,等. 实体企业金融化促进还是抑制了企业创新—基于中国制造业上市公司的经验研究[J]. 南开管理评论,2017,20(1):155-166.
WANG H J, CAO Y Q, YANG Q, et al. Does the financialization of non-financial enterprises promote or inhibit corporate innovation[J]. *Nankai Business Review*, 2017, 20(1):155-166.
- [22] 王定祥,李伶俐,吴代红. 金融资本深化、技术进步与产业结构升级[J]. 西南大学学报(社会科学版),2017,43(1):38-53.
WANG D X, LI L L, WU D H. Deepening of financial capital, technological progress and upgrading of industrial structure[J]. *Journal of Southwestern University (Social Sciences Edition)*, 2017, 43(1):38-53.

Operations Research and Cybernetics

Study on Regulatory Mechanism of Manufacturing Industry Based on Evolutionary Game

ZHANG Baoshuai¹, SHEN Kunping², TIAN Ying¹, LAI Ping¹

(1. College of Economic and Management, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. School of Business Administration, Chongqing City Management College, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] With the continuous deepening of China's financial development and the continuous improvement of China's economic financialization, the financial industry's profits significantly exceed the manufacturing industry, causing funds to flow out of the real economy, which creates a falsely high asset price, resulting in an "asset" bubble. Seriously, it will also cause "hollowing" of manufacturing industry. Therefore, it is of great significance to study the financialization of manufacturing industry in China. [Methods] This article uses the evolutionary game and simulation methods to construct an evolutionary game analysis framework based on the financialization of government and manufacturing enterprises, focusing on the factors affecting the choice of government and manufacturing enterprises, and simulating the evolutionary equilibrium process. [Findings] The key to the level of financialization of manufacturing enterprises lies in the measures taken by local governments, such as increasing extra fees and incentives. On the one hand, the decision-making behavior of manufacturing enterprises depends on the extra fees and incentives of local governments, while the behavior of manufacturing enterprises is contrary. It also affects the policy choices of local governments. [Conclusions] If the policy is set properly, the financial regulation mechanism of manufacturing industry based on this evolutionary game can ultimately achieve Pareto equilibrium of the economic system.

Keywords: evolutionary game; manufacturing financialization; regulatory mechanism

(责任编辑 黄 颖)

基于排队行为的专家门诊预约中患者决策建模研究*

羊英¹, 李静²

(1. 上海第二工业大学 经济与管理学院, 上海 201209; 2. 上海第一人民医院, 上海 200080)

摘要:【目的】通过建模讨论医疗中影响分诊的一个重要因素,即患者在专家门诊预约时行为决策的影响因素和模式,为医院的专家门诊及分诊管理提供建议。【方法】首先对患者专家门诊预约挂号时的排队行为模式进行分析,考虑专家服务质量、患者焦虑程度、患者对专家的期望值以及排队成本等因素建立了患者选择某一专家的服务价值模型,根据该价值模型可以推算患者的最长容忍等待时间和最长容忍排队队长。另一方面,将一个专家看作是一个服务台,则一个专家的排队系统是M/M/1/K类型的,K为该专家一日看诊量。分别分析K值固定时最优服务率、K值变动时最优服务率及对应的最优K取值。结合患者行为决策模型和专家排队系统模型提出医院的应对策略,最后对医院专家门诊及分诊的管理提出建议。【结果】建立了基于专家服务质量、排队成本和患者焦虑程度的患者排队行为决策模型,以此确定患者的最长容忍等待时间和最长容忍排队队长,建立了专家排队系统模型,并将行为决策模型与排队系统模型结合,提出医院应对策略。针对以上模型结合实际应用分别设计算例,算例证明方法的可行性。【结论】该研究一方面从患者排队行为角度建立了决策模型,该模型对已有的质量的模型进行修改,加入了口碑因子;又对行为决策影响因素,在质量和成本因素之外加入了焦虑程度因素。另一方面,从医院角度综合考虑患者满意度和医院效益分析专家看诊最优服务率的确定。最后给出了具体管理建议。但从行为决策角度看,患者在选择专家或医院时有许多不确定因素,该研究只是分析了其中一部分,有待深入探索。

关键词:行为决策;决策建模;专家门诊预约;排队行为

中图分类号:O29;C934

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)01-0021-08

1 研究背景

2015年中国卫生计划生育统计年鉴显示,2014年全国门诊、急诊次数已经超过了48亿人次^[1],医疗机构面临巨大的压力。在中国,“看病难,看病贵”成为困扰普通老百姓的一个大问题。“看病难”是由于医疗资源配置严重失衡,优质医疗资源过度集中在二、三级医院所导致的^[2]。优秀的医生和优良的设备集中在二级、三级医院,导致“大医院爆满,小医院冷清”^[3]。国家卫生健康委员会统计信息中心统计数据显示,2018年1—9月,全国医疗卫生机构总诊疗人次达61.4亿,其中三级医院诊疗约13.35亿人次,二级医院诊疗约9.63亿,两者加起来占比占37.2%;从看病费用方面看,2017年1—11月,全国三级公立医院次均门诊费用为304.2元,二级公立医院次均门诊费用为197.8元(以上数据均来自于国家卫生健康委员会统计信息中心网站)。另外上海市卫生计生委发布最新统计数据显示:2017年度上海市门急诊人次达25728.22万人次,同比增长3.16%。其中三级医院门急诊量占全市门急诊总量的37.39%,二级医院及其他医院等门急诊量占比29.61%,社区卫生服务中心门急诊量占比33%。《医药产业资讯》相关调查表明,全国三甲医院每天接诊的患者中,近70%是可以到社区医院或者一二级医院接受治疗的^[4]。

既然三级医院排队长、看病贵,为何人们依然愿意选择去大医院看病?张春瑜等人^[5]在某三甲医院的患者中选择1443人进行问卷调查,调查研究发现,影响患者选择的主要因素分3类:患者认知、相关群体和媒体因素。在认知方面,患者选择该医院就医的首要考虑因素按所占比例从大到小依次是医疗技术、位置远近、服务态

* 收稿日期:2018-05-31 修回日期:2018-10-11 网络出版时间:2019-01-09 7:38

资助项目:上海市科学技术委员会项目(No. 17495810503)

第一作者简介:羊英,女,副教授,博士,研究方向为决策分析与决策支持, E-mail: yangying@sspu.edu.cn; 通信作者:李静,女,助理馆员, E-mail: lisa_lijing@126.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190109.0731.034.html>

度、有无熟人、就医环境、价格因素。其中,以医疗技术水平作为首要考虑因素的患者最多,占 69.50%;将医疗价格作为首要考虑因素的患者仅 0.42%;其他将距离近、服务态度好、有熟人、就医环境好作为首要考虑因素的患者分别占 16.63%,7.90%,3.47%,2.08%。由此可见,大部分患者在选择时首要考虑的还是医疗技术水平,而专家门诊则普遍被认为是“信得过”的,所以大量患者选择去三甲医院预约专家门诊。同时,在选择就医的过程中患者不仅受到医疗技术、就医环境等因素的影响,还与他对自身病情的判断和对不同医疗机构的认知、期望有关。

在 20 世纪 90 年代国际上就有学者开始研究患者选择医院的问题。Adams 等人^[6]研究发现农村市场医疗保险受益人在医院选择时,距离不是最重要的因素;Bronstein 等人^[7]研究发现产妇在选择产科护理时不会选择在农村医院。近年的研究有:Ali Mohammad^[8]采用调研的方法研究了患者在选择医院时最重要的几个因素;Smith 等人^[9]使用多项式逻辑回归方法对患者选择医院问题建立模型;Walter^[10]设计了一个两阶段模型,包含患者和全科医生选择优化。另外还有一些文献研究医疗保险、公立/私立医院等因素选择医院的问题。

综上所述,目前已有大量文献针对患者在选择医院时影响因素进行研究,研究方法大多采用调研方法,结合统计学方法建立模型,从微观角度研究患者在选择医院时的行为决策的文献非常少。

针对目前患者盲目选择“最好的医院”行为,各级医疗机构在推行分级诊疗机制。在此过程中,最重要的就是对患者进行合理分流。如果要对患者进行分流,则需要充分了解患者在医院选择时考虑的因素和行为决策特征,针对他们的考虑因素和行为决策特征进行合理引导。而目前患者选择医院时一个重要体现就是专家门诊的选择与预约。本文拟对专家门诊预约中患者行为决策模式进行分析,建立行为决策模型,从而帮助医院建立合适的应对策略,为进一步提出患者分流策略提供参考。

2 专家门诊预约行为决策分析

2.1 预约排队行为分析

选择医疗机构的人员分为两类:一是患者自己;二是患者家属。具有行为能力、非重病的患者一般能够自主做出决策,而不具有行为能力的如孩子和老人,或是重病患者一般无法自己做出决策,而是由家属做出决策。以下分别对他们的预约行为进行分析:

一是患者自己做决策的情形。这一类患者对自己的病情有较清晰的认知,能根据获得的信息做出相对客观和理性的判断。在对医疗服务机构和医生的选择上,更趋于理性判断,根据病情轻重、医疗服务获得的难易程度综合考虑进行选择。

二是患者家属做决策。这种情况比较复杂,受患者家属焦虑程度影响很大。患者本身无法非常清楚地表达自己的病情情况,即使能够表达,家属无法亲身感受其痛苦但内心非常焦虑,导致对病情过度估计的情形非常多。在这种情绪影响下,在选择医疗服务机构时带有很盲目的成分,一味地追求最好的医生、最好的医院。最典型的例子是三甲医院的儿科,总是人满为患。当小孩感冒发烧时,家长很焦急,频繁地带小孩到医院,导致儿科就诊拥挤。

由以上两种行为分析,发现影响患者专家门诊预约的一个重要因素是患者或患者家属对病情的估计和对医疗服务的期望质量判断。

2.2 专家的服务质量分析

患者的病情估计决定预约时的焦虑程度。焦虑程度越高,则对专家门诊服务质量期望越高。所以,病情估计可以用焦虑程度来衡量,焦虑程度和对专家门诊服务期望质量是正相关的。

医院里的专家是有特殊知识、技能和责任的,其服务质量可以由他所具有的知识和技能来体现。而患者得到的服务质量可以由专家的等级和服务时间两个因素来度量^[11]。在此基础上,专家的口碑或声誉也是影响他服务质量的一个因素。Bansal 等人^[12]通过实验证明:顾客感知的企业服务质量越高,顾客越有可能产生正面的口碑传播,向他人推荐服务等等。因而,服务质量与口碑传播之间具有正效应。黄孝俊等人^[13]研究结果表明:正面的口碑传播在影响消费者购买决策的同时,也提高了消费者对该产品及其服务的预期。李林等人^[14]研究结果表明:顾客感知质量是良好的,倾向于传播正面的口碑;反之,感知质量是低下的,顾客倾向传播负面的口碑。由以上研究可见,患者所感知的专家服务质量受到专家口碑或声誉的影响。所以,应该将这个因素纳入服务质量模型。

对 Anand^[15] 和周华^[11] 的服务质量模型进一步修改,建立如下服务质量模型,以表达服务质量、专家等级、服务时间和专家口碑之间的关系:

$$Q(z) = [Q_b - z\mu]^+ \alpha = \left[Q_b - \frac{z}{t_1} \right]^+ \alpha. \quad (1)$$

这里 $x^+ = \max(x, 0)$; z 表示专家的等级,数值越小,等级越高; $Q(z)$ 代表该专家的服务质量; Q_b 代表患者所能获得的最大服务质量,由最大服务率、最高专家等级、最好口碑构成; μ 代表该专家的平均服务率, $\mu = \frac{1}{t_1}$, 其中 t_1 为该专家的平均服务时间,当 $t_1 \rightarrow \infty$ 时,对应的 $\frac{z}{t_1} \rightarrow 0$, 则有 $Q(z) \rightarrow Q(b)$; α 代表专家的口碑, $\alpha \in [0, 1]$ 。由(1)式可知:专家的服务质量随服务时间的增加而提高,但提高的幅度呈递减趋势,因为服务质量是有限的。而当服务时间相等时,等级高的专家能够提供更高的服务质量;当服务时间越来越长时,不同等级专家所提供的服务质量的差距越来越小。 α 越大,服务质量越高,当专家的口碑非常差,达到 0 时,将使得服务质量为 0,没有患者愿意预约该专家。

2.3 患者排队的成本分析

患者的排队成本由 3 个部分构成:等待成本、专家门诊价格和沉没成本。

等待成本是等待时间 t_2 的线性函数,用 $c(t_2)$ 表示。假设患者的到来服从泊松分布,到来率用 λ 表示;而专家的服务率用 μ 表示, $\mu = \frac{1}{t_1}$ 。从而等待时间 t_2 的期望值为:

$$E(t_2) = \begin{cases} \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{t_1}{1 - \lambda t_1}, & 0 \leq \lambda t_1 \leq 1 \\ \infty, & \lambda t_1 > 1 \end{cases}, \quad (2)$$

期望等待成本为:

$$E(c(t_2)) = \begin{cases} \frac{c}{\mu - \lambda} = \frac{ct_1}{1 - \lambda t_1}, & 0 \leq \lambda t_1 \leq 1 \\ \infty, & \lambda t_1 > 1 \end{cases}. \quad (3)$$

其中, c 表示单位等待成本。当到达率超过服务率时,队伍将不断延长,所以等待时间和等待成本趋向于无穷大。

服务价格与专家等级相关,是专家等级的线性函数,用 $p(z)$ 表示, $p(z) = p(z_{\max} + 1 - z)$, 其中 p 为对应等级专家单位服务价格, z_{\max} 为专家等级最大取值,取值越大,等级越低。

沉没成本是指由于过去的决策已经发生,而不能由现在或将来的任何决策改变的成本。患者在选择某个专家门诊预约排队等待前已经花费了一定时间成本、金钱成本或体力成本,这部分计入沉没成本。用 c_s 来表示。等待时间越长,沉没成本越高,设 $c_s = bt_2$, 其中 b 为单位等待时间成本。

另外考虑每个患者对不同成本因素的敏感程度不同,设置 $w_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, 3$ 作为每个成本因素的权重,其中 $\sum_{i=1}^3 w_i = 1$ 。

综上,排队成本可以表示为:

$$T_c = w_1 c(t_2) + w_2 p(z) + w_3 c_s. \quad (4)$$

2.4 焦虑程度分析

焦虑程度用 $A(r, e)$ 表示,主要影响因素为决策者与患者之间的关系(r)以及对病情的估计(e)。

为了研究方便,把决策者与患者之间的关系分为两类:一是患者自己为决策者;二是决策者是患者家属。 $r \in [0, 1]$,如果患者就是决策者的话,取 $r = 0.5$;如果决策者是患者家属,那么他与患者关系越亲密, r 取值越大,反之越小。

对病情估计值设置为: $e \in (0, 1]$ (此处 e 不为 0, 如果为 0 意味着没有病,则无需预约专家看病),估计越严重,则越趋向于 1。另外,对病情估计越严重,能容忍的等待时间 t_2 越短。并且,因为此处研究的是门诊预约问题,而非急诊,所以能容忍的等待时间 t_2 的取值大于 0, t_2 的单位根据研究问题划分时间粒度决定。此处假设 t_2 的单位为 h。所以有 $t_2 e = 1$, $e = \frac{1}{t_2}$, 可以推算出 $t_2 \in [1, \infty)$ 。

$$A(r, e) = (1+r) \times (1+e) = (1+r) \times \left(1 + \frac{1}{t^2}\right). \quad (5)$$

当焦虑程度 $A(r, e)$ 和关系 r 两个参数已知时, 可以推算出容忍的等待时间 t_2 , 此时对应的是患者能容忍的最大等待时间 $t_{2\max}$ 。

3 专家门诊预约决策模型

三甲医院的专家门诊很难预约到, 尤其是口碑好的专家更是难预约, 但为什么很多患者或患者家属还是坚持要到三甲医院找专家看病, 而不愿意选择离家近的, 或者不是那么热门的专家看病呢? 以下对专家门诊预约中的行为决策进行分析。

3.1 患者的行为决策模型

患者是否选择某个专家进行预约, 是根据他能获得的服务价值决定的。服务价值是顾客的感知利得与感知利失间的差^[16-17]。此处的感知利得是指所能获得服务质量 $Q(z)$, 感知利失是指排队成本 T_c 。此外, 患者的焦虑程度将对服务价值产生影响, 所以综合 3 个因素, 服务价值 V 可以表示为:

$$V = a_1 Q(z) - T_c - a_2 A(r, e). \quad (6)$$

(6)式中的 a_1 表示每一单位服务质量价值系数, a_2 表示每一单位焦虑程度折合的价值系数。

用 $s(i)$ 表示第 i 个患者的策略选择, $s(i) = 0$ 表示离开队列, $s(i) = 1$ 表示留在队列。显然有:

$$V_i = \begin{cases} a_1 Q(z) - T_c - a_2 A(r, e) \leq 0, & s(i) = 0 \\ a_1 Q(z) - T_c - a_2 A(r, e) > 0, & s(i) = 1 \end{cases}. \quad (7)$$

当期望价值大于焦虑程度时, 患者会选择排队等待; 而期望价值小于焦虑程度时, 患者会放弃排队, 而选择其他专家。也就是说患者只有当 $V(i) > 0$ 时才会进入队列。令 $V(i) = 0$, 此时对应的 t_2 是患者 i 能容忍的最长等待时间($t_{2\max}$)。将(1), (3), (4), (5)式带入(7)式, 则有:

$$V_i(t_2) = a_1 (Q_b - z\mu)\alpha - \frac{c\omega_1}{\mu - \lambda} - \omega_2 p(z_{\max} + 1 - z) - \omega_3 b t_2 - a_2 (1+r) \left(1 + \frac{1}{t_2}\right) = 0. \quad (8)$$

假设除了 t_2 以外的其他变量均为已知, 则求解(8)式可以获得 $t_{2\max}$ 的取值。

根据前述分析, 当患者的焦虑程度和关系 r 已知时, 则可计算出 $t_{2\max}$ 的值, 代入(8)式, 可推算出患者希望看诊的专家等级。当患者的焦虑程度未知时, 可以根据他预约的专家等级等信息推算出他的最大容忍等待时间 $t_{2\max}$ 。

令 n 为队列中排队等待的人数, μ 为服务率, 在 $M/M/1$ 排队系统中, 患者的预期等待时间为:

$$t_2 = \frac{n+1}{\mu}. \quad (9)$$

综合(8), (9)式, 设 N_q 为患者能容忍的最长队列, 则有 $N_q = \mu t_{2\max} - 1$ 。

当患者进入预约系统, 看到某个专家的排队人数 $n \leq N_q$ 时, 他会选择进入队列排队等候; 否则, 将会选择其他专家。

如果将一个专家看作是一个服务台, 则一个专家的排队系统是 $M/M/1/K$ 类型的^[18], 其中 K 是每个时间段专家能看诊的病人数, 即为该排队系统的容量。患者到来过程和服务过程是独立的:

$$K = \overline{N_q} + 1 = \mu \overline{t_{2\max}}. \quad (10)$$

其中 $\overline{N_q}$ 是所有选择该专家的患者平均可容忍最大队长, $\overline{t_{2\max}}$ 表示患者平均可容忍最长等待时间。可见 K 是 μ 的函数, 如果设定 K 为固定值的话, μ 越小, 则 $\overline{t_{2\max}}$ 越大。而 $\mu = \frac{1}{t_1}$, μ 越小, 则意味着服务时间 t_1 越大, 而 t_1 越大, 患者感知的服务质量越高。 $t_{2\max}$ 越大, 意味着患者平均容忍等待时间越长。这也和现实非常吻合: 患者愿意花时间去等待服务质量高的专家。

3.2 医院的应对策略分析

在专家预约排队系统里, 目标函数设置不能仅考虑医院的收益最大化, 还应该考虑资源优化利用、患者的满意度等角度出发。

如果把专家单位时间段内可用于看诊的时间看作是资源的话, 如何充分利用这些时间接诊更多有需要的病人将成为医院的一个非常重要的目标。

3.2.1 K 值固定时最优服务率的确定 目前大多数专家门诊每日看诊人数是设置固定上限的,即 K 值是固定的。

服务率 μ 由患者平均看诊时间 t_1 决定,每个患者看诊时间 t_1 将决定患者的感知服务质量,如果要提高患者满意度,就应该保证每个患者的看诊时间,设置最小看诊时间 $t_{1\min}$,保证每个患者和专家之间充分的沟通。假设每个专家每天看诊总的时间为 T ,则有:

$$t_{1\min} = \frac{T}{K} - \epsilon, \quad (11)$$

其中 ϵ 是两个患者之间切换的时间和医生休息的时间。由最小看诊时间 $t_{1\min}$,可以对应获得最大服务率 μ ,即 $\mu_{\max} = \frac{1}{t_{1\min}}$ 。

在实际操作中,可以预测每个患者就诊开始时间,提前告知患者,患者可以按时来就诊,不需花费太长时间的排队等待,从而改善患者就诊体验,提高患者满意度。这种方式适合用在患者排队等待量不大的科室或专家门诊。

3.2.2 K 值变动设置 虽然目前大部分医院专家门诊都设立每日固定号源数,但对于某些热门科室或热门专家,显然不是最合理的。主要原因有两个方面:一是每个患者看诊时间不一致,因为每个患者病情不一样,所以需要看诊的时间有的长,有的短。如果遇到看诊时间比较长的患者多,导致专家要加班才能完成当天的工作;二是对于热门科室或专家,号源数总是不够用的,必须要优化专家资源的利用率,才能既有效利用资源又增加患者的满意度。

假设患者的到来是参数为 λ 的 Poisson 流,即顾客相继到达的时间间隔序列独立,服从分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ 。每个顾客所需要的服务时间也是独立的,服从参数为 μ 的分布 $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $t \geq 0$ 。将一个专家看作是一个服务台,则其每个时间段的号源数可以看作系统容量。且到达过程与服务过程相互独立。

当患者挂号时,如果 K 个号源全部预约完毕,则患者不得不放弃,无法进入排队;当号源数还有余额时,患者进入队列排队。该过程可以看作是一个有限状态的生灭过程,根据其稳定状态求解公式可以推算系统中有 j 个患者的稳定概率为:

$$P_j = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}}, \rho \neq 1, 0 \leq j \leq k \\ \frac{1}{k+1}, \rho = 1, 0 \leq j \leq k \end{cases}, \text{其中 } \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (12)$$

对于 $M/M/1/K$ 的专家门诊预约排队系统,患者不能拿到预约号概率为 P_k ,能拿到预约号的概率为 $1 - P_k$ 。因此单位时间内能进入排队队列的患者人数为: $\bar{\lambda}_i = \lambda(1 - P_k)$ 。

假设平均每个患者能给医院带来的收益为 h ,而为每个患者服务时,医院花费的平均成本为 c_h ,则单位时间内医院的收益为:

$$f(\mu) = \lambda(1 - P_k)h - c_h\mu. \quad (13)$$

假设 λ, h, c_h 均为已知,由(10)式有 $k = \mu t_{2\max}$,代入(13)式,由函数 $f(\mu)$ 对 μ 求导,令 $f(\mu)$ 等于 0,有:

$$f'(\mu) = -\lambda h P'_k - c_h = 0. \quad (14)$$

对(14)式求解,则可求出最优服务率 μ^* ;进一步推算出最优服务率下 K 的取值,从而可以动态设定每日号源量。

4 算例

4.1 患者排队决策算例

假设某三甲医院规定:专家等级分 5 个层次,分别用 $z=1,2,3,4,5$ 表示,数字越小等级越高;根据上海现行医院政策规定,对专家门诊实行限号,一个专家半天只能看 30~35 个号,特殊情况下才允许加号。一个专家一天最多可以看 70 个号,每天按坐诊 8 h 来算,则每个患者最小服务时间为 $\frac{8}{70}$ h,对应的最大服务率 $\mu_b = 8.75$;假设某个科室规定专家一天最多可以看诊 50 个号,平均每个患者服务时间为 $t_1 = \frac{8}{50} = 0.16$ h。

假设目前有一个患者,需要为自己预约挂号, $r=0.5$,病情估计衡量为 0.8,所以可以推算出最大容忍等待时

间为 $t_{2_{\max}} = \frac{1}{0.8} = 1.25$ h。另外,将服务率、专家等级和口碑都取到最佳值,则可获得最好服务质量: $Q_b = 8.75 \times \frac{5}{1} \times 1 = 43.75$ 。假设对于该患者等待成本、专家门诊价格和沉没成本三者的权重一样,所以有: $w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}$ 。当前上海三甲医院门诊挂号费为 22 元,故设定 $p = 22$,所有专家口碑都设定为 $\alpha = 1$ 。根据前文分析,患者平均到来率必须小于服务率,现假设该科室患者到来率: $\lambda = 6$ 。当前上海最低工资标准为 2 420 元·月⁻¹,按每天工作 8 h,工作 22 d 来算,折合成每小时 13.75 元,假设该患者单位时间等待成本为 $c = b = 15$ 元。再假设对患者而言质量和焦虑程度价值系数分别为: $a_1 = 1.5, a_2 = 1.5$ 。

将以上数值代入(8)式,则有:

$$1.5 \times \left(43.75 - z \times \frac{50}{8} \right) \times 1 - \frac{1}{3} \times \frac{15}{\frac{50}{8} - 6} - \frac{1}{3} \times 22(6 - z) - \frac{1}{3} \times 15 \times 1.25 - 1.5 \times (1 + 0.5)(1 + 0.8) = 0。$$

可以推算出 $z = 2.889$,即这个患者将希望预约到一个级别在 2~3 左右的专家。

如果患者焦虑程度未知,但发现他在预约一个等级为 1 的专家,其他条件同以上假设。则可以推算出他的最大容忍时间为: $t_{2_{\max}} = 0.39$ h。

根据前面分析, $N_q = \mu t_{2_{\max}} - 1 = \frac{50}{8} \times 0.39 - 1 = 1.4375$,所以当该患者看到队列的排队时间小于 2 h 时,会选择进入队列,否则会选择别的专家。

4.2 医院应对策略算例

当每日给定号源数 K 一定时,可以预测出每个预约患者接受服务的时间,从而提前告知患者,减少患者等待时间,目前许多医院已经实现了这种管理方式。

以下讨论根据最优服务率设定 K 值的算例。

接上例的假设, $\lambda = 4, h = 10, c_h = 5$,另设患者平均最大容忍等待时间为: $\overline{t_{2_{\max}}} = 1$ h,则 $k = \mu$ 。将以上数据代入(13),(14)式,则有:

$$f(\mu) = 40(1 - P_k) - 5\mu, \quad (15)$$

$$f'(\mu) = -40P'_k - 5 = 0. \quad (16)$$

图 1 是 $f'(\mu)$ 的函数曲线,在图中 $f'(\mu) = 0$ 的点有两个,其中一个太接近 0,舍弃。另外一个,使用 Matlab 求解方程,得到 $\mu^* \approx 4.26$ 。代入(15)式,求得 $f(\mu) = 12.0792$ 。根据前文分析,此处 $k = \mu = 4.26$,即在患者最大容忍等待时间为 1 h 时,医院能提供的预约号数为 5 个(4.26 向上取整数)。由此推算,一天按照 8 h 工作时间算,则能提供最大服务为 $5 \times 8 = 40$ 个预约号。

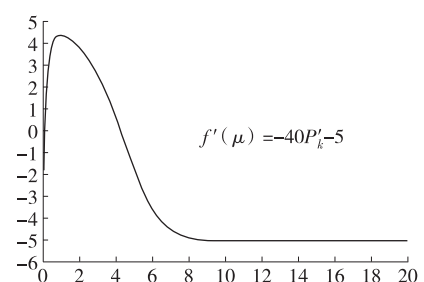


图 1 $f'(\mu)$ 的曲线

Fig. 1 Curve of $f'(\mu)$

5 结论

医疗服务需求的持续增长给各级医疗机构带来了挑战。虽然目前全国已经建立了各级医疗机构,并布局到村、镇等尽量接近居民生活的地方,但由于医疗资源的级别、医疗水平、患者对医疗机构的看法和对自身病情估计等因素影响,导致患者大量拥向大城市的三甲医院,使得这些医院不堪重负,而二级及以下医疗机构门可罗雀。在这样的背景下,研究患者在专家门诊预约中行为决策的特征对制定医疗分诊策略变得非常具有实际意义。

本文首先对患者预约排队行为进行分析,发现患者对病情的估计和对医疗服务的期望质量判断是两个影响患者决策的重要因素;接着,分别对影响患者行为决策的主要因素进行分析,修改了质量模型,增加了口碑因子,以往的行为决策模型只包含质量和成本因素,在此基础上,又增加焦虑因素,构建了包含医疗服务的期望质量、排队成本和焦虑程度等因素患者行为决策模型;第三部分建立了患者预约行为决策模型,并分析医院对应的应对策略。最后一部分设计了两个算例,分别验证模型的可行性。通过算例计算发现,该模型具有可行性,可推广

到医院管理实践中。

根据以上研究,给医院提出以下管理建议:1) 医院可以设置最小看诊时间,以保证医院的利益和患者的满意度;2) 每个科室可以统计和计算患者的最长容忍时间和最长容忍队长,及时调整专家数和专家看诊数量,以提高患者的满意度;3) 专家号源数固定的科室或专家可以根据最优服务率调整患者看诊时间;4) 专家号源数可变的科室或专家,设置合理的专家号源数以充分利用专家资源,同时达到患者分流目的。

本研究针对患者在专家门诊预约中的行为决策进行研究,并建立了模型,但这只是一个开始,该领域还存在许多问题值得探索:一方面,患者行为决策受到许多复杂因素的影响,需要搜集大量数据进行更进一步的挖掘和分析;另一方面,可以在已有研究基础上探索医疗分诊机制。

参考文献:

- [1] 国家卫生和计划生育委员会. 中国卫生和计划生育统计年鉴 2015[M]. 北京:中国协和医科大学出版社,2015.
National Health Commission. Statistical yearbook for health and family planning in China[M]. Beijing: Peking Union Medical College Press, 2015.
- [2] 朱恒鹏. 建立分级诊疗体系缓解医患矛盾冲突[N]. 中国医药报, 2014-03-24(6).
ZHU H P. Establishing the system of grading diagnosis and treatment to relieve the conflict between doctors and patients[N]. Chinese Medicine Newspaper, 2014-03-24(6).
- [3] 吕键. 论深化医改进程中分级诊疗体系的完善[J]. 中国医院管理, 2014, 34(6): 1-3.
LÜ J. Deepening the improvement of grading treatment system in the process of medical reform[J]. Hospital Management in China, 2014, 34(6): 1-3.
- [4] 王克. “分级诊疗”, 一个美丽的神话? [J]. 决策探索, 2014(4): 61-63.
WANG K. "Grading treatment", a beautiful myth? [J]. Decision Exploration, 2014(4): 61-63.
- [5] 张春瑜, 李天庆. 大型综合性医院患者就医行为影响因素分析[J]. 卫生经济研究, 2009(10): 32-33.
ZHANG C Y, LI T Q. Influencing factors of patients' medical seeking behavior in large general hospitals[J]. Research on Health Economy, 2009(10): 32-33.
- [6] ADAMS E K, WRIGHT G E. Hospital choice of medicare beneficiaries in a rural markets; why not the closest? [J]. The Journal of Rural Health, 1991, 7(2): 134-152.
- [7] BRONSTEIN J M, MORRISEY M. Bypassing rural hospitals for obstetric care[J]. Journal of Health Politics, Policy and Law, 1991, 16(1): 87-118.
- [8] ALI MOHAMMAD M. Patient choice of a hospital: implications for health policy and management[J]. International Journal of Health Care Quality Assurance, 2014, 27(2): 152-164.
- [9] SMITH H, CURRIE C, CHAIWUTTISAK P, et al. Patient choice modelling: how do patients choose their hospitals? [J]. Health Care Management Science, 2017, 21(2): 1-10.
- [10] WALTER B. Choice in the presence of experts; the role of general practitioners in patients' hospital choice[J]. Journal of Health Economics, 2018, 60: 98-117.
- [11] 周华, 周水银. 基于顾客排队行为的专业服务等级的决策问题[J]. 中国管理科学, 2014, 22(2): 85-93.
ZHOU H, ZHOU S Y. Decision making of professional service level based on customer queuing behavior[J]. Chinese Journal of Management Science, 2014, 22(2): 85-93.
- [12] BANSAL H S, VOYER P A. Word-of-mouth processes within a services purchase decision context[J]. Journal of Service Research, 2000, 3(2): 166-177.
- [13] 黄孝俊, 徐伟青. 口碑传播的基本研究取向[J]. 浙江大学学报(人文社会科学版), 2004, 34(1): 125-132.
HUANG X J, XU W Q. Reflections on the word-of-mouth communication research[J]. Journal of Zhejiang University (Humanities and Social Sciences), 2004, 34(1): 125-132.
- [14] 李林, 孙军华, 周章金. 基于复杂社会网络的服务质量口碑传播[J]. 系统工程, 2009, 27(6): 1-7.
LI L, SUN J H, ZHOU Z J. Service quality word-of-mouth spreading based on complex social network[J]. Systems Engineering, 2009, 27(6): 1-7.
- [15] ANAND K S, PAÇ M F, VEERARAGHAVAN S. Quality speed conundrum: trade-offs in customer-intensive services[J]. Management Science, 2011, 57(1): 40-56.
- [16] ZEITHAML V A. Consumer perceptions of price, quality, and value: a means-end model and synthesis of evidence [J]. Journal of Marketing, 1988, 52(3): 2-22.
- [17] GRÖNROOS C. Value-driven relational marketing: from products to recourses and competencies [J]. Journal of Marketing Management, 1997, 13(5): 407-419.
- [18] 李娜, 贾博, 江志斌, 等. 考虑顾客体验的排队系统研究 [J]. 工业工程与管理, 2012, 17(3): 36-46
LI N, JIA B, JIANG Z B, et al. Research on queuing system considering customer's experience[J]. Industrial Engineering and Management, 2012, 17(3): 36-46.

Operations Research and Cybernetics

**Study on Patients' Decision Making Modeling in
Specialist Outpatient Appointment Based on Queuing Behavior**YANG Ying¹, LI Jing²

(1. School of Economics and Management, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209;

2. Shanghai General Hospital, School of Medicine, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200080, China)

Abstract: [Purposes] Nowadays, patients blindly pursue “the best” when choosing medical resources, leading to the difficulty to make appointment to famous specialist in large hospitals. Medical institutions want to solve such problems by triage. One of the important factors in the triage is what factors and patterns are the main factors and patterns of the patient's decision making in a specialist outpatient appointment. [Methods] Firstly, the queuing behavior model of patients in the specialist outpatient appointment registration is analyzed. Considering the factors of specialist service quality, patient anxiety, expectancies of patients to specialists and queuing cost, the service value model of patients choosing a certain specialist is established. According to the model, the patient's longest tolerating waiting time and longest tolerating queue length can be calculated. On the other hand, take the specialist as a service desk, then a specialist's queuing system is a $M/M/1/K$ system, and K is the specialist's daily visits. The optimal service rate at fixed K value, optimal service rate and corresponding optimal K value when K value changes is analyzed respectively. Combining patient behavior decision-making model and specialist queuing system model, the hospital's coping strategies are put forward, and finally the management suggestions of hospital specialist outpatient service and consultation are proposed. [Findings] A queuing behavior decision-making model based on specialist service quality, queuing cost and patient anxiety was established to determine the longest tolerant waiting time and queuing queue length of patients. The specialist queuing system model was established, and the behavior decision-making model was combined with the queuing system model to propose hospital response strategies. An example is given to illustrate the feasibility of the method. Finally, feasible suggestions for specialist outpatient management are put forward. [Conclusions] On the one hand, the study establishes a decision-making model from the perspective of patient queuing behavior, which modifies the existing quality model by adding word-of-mouth factors and behavior decision-making factors. On the other hand, anxiety factors are added in addition to quality and cost factors. On the other hand, from the perspective of hospital, patients' satisfaction and hospital benefits are considered comprehensively, the best service rate is determined by the two factors. Finally, specific management recommendations are given. However, from the perspective of behavioral decision, there are many uncertainties in the choice of a specialist or a hospital. The study is only a part of the whole research, which needs to be explored in depth.

Keywords: behavioral decision; decision modeling; specialist outpatient appointment; queuing behavior

(责任编辑 黄 颖)

具有独立偏好的三方匹配问题*

张峰^{1,2}, 钟力炜³

(1. 上海第二工业大学 资源循环科学与工程中心; 2. 上海第二工业大学 文理学部, 上海 201209;
3. 上海交通大学附属第一人民医院, 上海 200080)

摘要:【目的】讨论3个主体集 U, V, W 之间的三方匹配问题, 得到相关理论与算法。【方法】通过三方匹配问题所导出的一对一双边匹配问题, 应用双边匹配问题的结果得到所讨论的三方匹配问题的相关结果。【结果】对于具有独立偏好三方匹配问题, 给出其稳定匹配概念, 并证明稳定匹配一定存在, 以及给出了求解稳定匹配的算法。【结论】所讨论的具有独立偏好三方匹配问题所得到的结果与算法为三方匹配问题研究与应用提供新途径。

关键词: 主体集; 三方匹配; 偏好; 稳定匹配

中图分类号: O22; C931

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)02-0001-05

涉及偏好的匹配问题具有广泛的应用背景, 例如住院医生与医院匹配、学生宿舍如何分配(学生与学生匹配)、肾移植病人与捐赠者匹配、物流管理(司机、车辆、线路之间匹配)等等。匹配是决策双方做出决策的重要机制, 双边匹配问题首先由 Gale 和 Shapley 在研究婚姻匹配和大学招生问题中提出^[1], 并提出了著名的 Gale-shapley 算法。所谓双边匹配问题就是有两个主体集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 与 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 每个 $u_i \in U$ 对主体集 V 中所有主体有一个严格偏好 (Strict preference)。同样地, 每个 $v_j \in V$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好。在以后的几十年中, 稳定匹配理论得到广泛的关注, 相关研究得到了比较大的发展, 应用领域也非常广泛^[2-6]。双边匹配问题的模型更加广泛, 从完全严格偏好推广到非完全偏好^[7], 双边一对一匹配问题发展为多对一 (Many-to-one) 匹配问题^[8-9], 成对 (With couples) 的双边匹配问题^[10-11], 以及其他各种匹配问题^[12-16]。

三方 (Three-sided) 匹配问题就是研究有3个主体集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 的匹配问题, 研究内容包括主体对上严格偏好 (Strict preferences over pairs) 的匹配问题^[17], 即每个 $u_i \in U$, $v_j \in V$, $w_k \in W$ 分别对于 $V \times W$, $U \times W$, $U \times V$ 中所有主体对有一个严格偏好。循环偏好 (Cyclic preferences) 的匹配问题^[18-20], 即每个 $u_i \in U$ 对于主体集 V 中所有主体有一个严格偏好, 每个 $v_j \in V$ 对主体集 W 中所有主体有一个严格偏好, 每个 $w_k \in W$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好。以及混合偏好的匹配问题^[21], 即每个 $u_i \in U$ 对于 $V \times W$ 中所有主体对有一个严格偏好, 每个 $v_j \in V$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好, 每个 $w_k \in W$ 对主体集 U 中所有主体有一个严格偏好。

从上述几种三方匹配问题可以看出三方匹配问题不是简单地从双边匹配问题推广而来, 从主体集个数的角度来看, 是从双边推广到三方。然而对于一个三方匹配问题, 如果只考虑其中两个主体集, 并不能得到或导出相应的双边匹配问题, 这主要是由于应用背景不同所讨论的三方匹配问题中给出的“偏好”定义可以有多种形式, 不是双边匹配问题所定义的偏好的简单推广, 即从三方匹配问题中所定义的偏好并不是都可以得到任意两个主体集之间的偏好。所以根据三方匹配问题所定义的偏好, 有些类型的三方匹配问题与双边匹配问题由本质区别, 这也是研究三方匹配问题意义所在。

本文讨论三方匹配问题是3个主体集 U, V, W 彼此之间具有独立偏好, 即 U 与 V , V 与 W , U 与 W 之间分别有不同的偏好, 这一问题可以与双边匹配问题建立联系。具有独立偏好的三方匹配问题也具有实际应用背景,

* 收稿日期: 2018-09-11 修回日期: 2018-11-26 网络出版时间: 2019-03-15 07:00

资助项目: 上海市高原学科—环境科学与工程(资源循环科学与工程)项目; 国家自然科学基金重点国际(地区)合作项目(No. 71520107003); 上海市科委项目(No. 17495810500)

第一作者简介: 张峰, 男, 教授, 博士, 研究方向为运筹学, E-mail: zhangfeng@sspu.edu.cn; 通信作者: 钟力炜, 男, 主任医师, E-mail: zhongliwei@gmail.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190315.0056.020.html>

比如在医院手术安排过程中,由一主刀医生、一上台护士和一麻醉师组成手术团队核心成员,每位主刀医生对所有上台护士(麻醉师)有一偏好,同样每位上台护士对所有主刀医生(麻醉师)有一偏好,每位麻醉师对所有主刀医生(护士)有一偏好。对于具有独立偏好的三方匹配问题,给出其三方稳定匹配的概念,以及求解稳定匹配的算法。

1 问题描述

设有 3 个主体集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 所谓 3 个主体集彼此之间有偏好的三方匹配问题,就是考虑主体集 U 与主体集 V 之间有严格偏好,主体集 V 与主体集 W 之间有严格偏好,主体集 W 与主体集 U 之间有严格偏好。主体集 U 中每个主体 $u_i (i=1, 2, \dots, n)$ 对于主体集 V 中个主体有一严格偏好(Strict preferencelist), 记为 $P(u_i \Rightarrow V)$, 用 $\text{pri}(u_i, v_j) > \text{pri}(u_i, v_l)$ 表示主体 u_i 对 v_j 的偏好优于对 v_l 的偏好; 主体集 V 中每个主体 $v_j (j=1, 2, \dots, n)$ 对于主体集 U 中 n 个主体有一严格偏好, 记为 $P(v_j \Rightarrow U)$, 用 $\text{pri}(v_j, u_i) > \text{pri}(v_j, u_l)$ 表示主体 v_j 对 u_i 的偏好优于对 u_l 的偏好。类似地可定义主体集 U 与 W 彼此之间, 以及主体集 V 与 W 彼此之间的偏好。

将要讨论的三方匹配问题记为 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$, 由于 U 与 V 、 V 与 W 、 U 与 W 之间分别有不同的偏好, 从而可导出 3 个双边匹配问题, 由三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 导出的主体集 U 与主体集 V 之间的一对一双边稳定匹配问题记为 $P\{U \Leftrightarrow V\}$; 主体集 V 与主体集 W 之间的一对一双边稳定匹配问题记为 $P\{V \Leftrightarrow W\}$; 主体集 U 与主体集 W 之间的一对一双边稳定匹配问题记为 $P\{U \Leftrightarrow W\}$, 下面先引入一些基本概念与记号。

定义 1 设 $u_i \in U, v_j \in V, w_k \in W, (u_i, v_j, w_k) \in U \times V \times W$ 称为一个三元组, 是 3 个主体集 U, V 与 W 的一个配对。集合 $M \subset U \times V \times W$ 称为三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配, 如果 M 中任意两个不同的三元组 $(u_{i_1}, v_{j_1}, w_{k_1})$ 与 $(u_{i_2}, v_{j_2}, w_{k_2})$ 一定满足 $i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2, k_1 \neq k_2$ 。

设 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配, $(u_i, v_j, w_k) \in M$, 则记 $u_i = M_U(v_j) = M_U(w_k) = M(v_j, w_k)$; $v_j = M_V(u_i) = M_V(w_k) = M(u_i, w_k)$; $w_k = M_W(u_i) = M_W(v_j) = M(u_i, v_j)$ 。 $M|_U = \{u_i | (u_i, v_j, w_k) \in M\}$, $M|_V = \{v_j | (u_i, v_j, w_k) \in M\}$, $M|_W = \{w_k | (u_i, v_j, w_k) \in M\}$ 。

若 $u_i \in M|_U$, 则称 u_i (关于匹配 M) 已指派, $u_i \notin M|_U$, 则称 u_i (关于匹配 M) 未指派。同样可定义 v_j 与 w_k 是否已指派。当 $(u_i, v_j, w_k) \notin M$ 时, 一种情况是 u_i 已指派, 在这种情况下显然有 $v_j \neq M_V(u_i)$ 或 $w_k \neq M_W(u_i)$ 成立; 另一种情况是 u_i 未指派, 即 $M_V(u_i) = M_W(u_i) = \emptyset$ 。

这样上述两种情况可统一表示为: 当 $(u_i, v_j, w_k) \notin M$ 时, 一定成立 $v_j \neq M_V(u_i)$ 或 $w_k \neq M_W(u_i)$ 。同样也一定成立 $w_k \neq M_W(v_j)$ 或 $u_i \neq M_U(v_j)$; 以及成立 $u_i \neq M_U(w_k)$ 或 $v_j \neq M_V(w_k)$ 。

下面给出三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 稳定匹配的概念。

定义 2 设 $M \subset U \times V \times W$ 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配, 设 $(u_i, v_j, w_k) \notin M$, 则称 (u_i, v_j, w_k) 为匹配 M 的一个中意对, 也称为阻碍对(A blocking pair of M), 如果下列 3 个条件满足:

- 1) u_i 未指派。或 u_i 已指派: 若 $v_j \neq M_V(u_i)$, 则有 $\text{pri}(u_i, v_j) > \text{pri}(u_i, M_V(u_i))$ 成立; 若 $w_k \neq M_W(u_i)$, 则有 $\text{pri}(u_i, w_k) > \text{pri}(u_i, M_W(u_i))$ 成立。
- 2) v_j 未指派。或 v_j 已指派: 若 $w_k \neq M_W(v_j)$, 则有 $\text{pri}(v_j, w_k) > \text{pri}(v_j, M_W(v_j))$ 成立; 若 $u_i \neq M_U(v_j)$, 则有 $\text{pri}(v_j, u_i) > \text{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 成立。
- 3) w_k 未指派。或 w_k 已指派: 若 $u_i \neq M_U(w_k)$, 则有 $\text{pri}(w_k, u_i) > \text{pri}(w_k, M_U(w_k))$ 成立; 若 $v_j \neq M_V(w_k)$, 则有 $\text{pri}(w_k, v_j) > \text{pri}(w_k, M_V(w_k))$ 成立。

定义 3 三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配 M 称为是稳定的, 如果不存在匹配 M 的中意对(阻碍对)。

例 1 设 3 个主体集 $U = \{u_1, u_2\}$, $V = \{v_1, v_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$, 考虑三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个实例如下。

主体集 U 与主体集 V 之间偏好: $u_1: \text{pri}(u_1, v_1) > \text{pri}(u_1, v_2)$; $u_2: \text{pri}(u_2, v_2) > \text{pri}(u_2, v_1)$; $v_1: \text{pri}(v_1, u_1) > \text{pri}(v_1, u_2)$; $v_2: \text{pri}(v_2, u_1) > \text{pri}(v_2, u_2)$ 。

主体集 V 与主体集 W 之间偏好: $v_1: \text{pri}(v_1, w_1) > \text{pri}(v_1, w_2)$; $v_2: \text{pri}(v_2, w_2) > \text{pri}(v_2, w_1)$; $w_1: \text{pri}(w_1, v_1) > \text{pri}(w_1, v_2)$; $w_2: \text{pri}(w_2, v_1) > \text{pri}(w_2, v_2)$ 。

主体集 U 与主体集 W 之间偏好: $u_1: \text{pri}(u_1, \omega_1) > \text{pri}(u_1, \omega_2); u_2: \text{pri}(u_2, \omega_2) > \text{pri}(u_2, \omega_1); \omega_1: \text{pri}(\omega_1, u_1) > \text{pri}(\omega_1, u_2); \omega_2: \text{pri}(\omega_2, u_1) > \text{pri}(\omega_2, u_2)$ 。

可以验证匹配 $M = \{(u_1, v_1, \omega_1), (u_2, v_2, \omega_2)\}$ 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。因为三元组 (u_1, v_2, ω_1) 是匹配 $\tilde{M} = \{(u_1, v_2, \omega_1), (u_2, v_1, \omega_2)\}$ 的一个中意对(阻碍对), 所以这个匹配 \tilde{M} 不是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。

2 定理与算法

由于主体集 U, V, W 之间是可以充分配对, 如果匹配 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的稳定匹配, 那么这个稳定匹配 M 所包含的匹配对个数一定是 n 个, 所以下面讨论中都是针对匹配 M 所包含的匹配对个数为 n 的情况。

设 $M \subset U \times V \times W$, 令 $M|_{U \times V} = \{(u_i, v_j) | (u_i, v_j, \omega_k) \in M\}$, 称 $M|_{U \times V}$ 为集合 M 在 $U \times V$ 上投影, 同样可定义集合 M 在 $V \times W$ 上投影 $M|_{V \times W} = \{(v_j, \omega_k) | (u_i, v_j, \omega_k) \in M\}$, 以及在 $U \times W$ 上投影 $M|_{U \times W} = \{(u_i, \omega_k) | (u_i, v_j, \omega_k) \in M\}$ 。

根据上面的定义, 显然有下面的结论。

引理 1 设 $M \subset U \times V \times W$ 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配的充分必要条件: $M|_{U \times V}, M|_{V \times W}, M|_{U \times W}$ 分别是一一对双边稳定匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}, P\{V \Leftrightarrow W\}$ 以及 $P\{U \Leftrightarrow W\}$ 的匹配。并且:

- 1) 若 $(u_i, v_j, \omega_k) \in M$, 则 $(u_i, v_j) \in M|_{U \times V}, (v_j, \omega_k) \in M|_{V \times W}, (u_i, \omega_k) \in M|_{U \times W}$, 反之亦然。
- 2) 若 $(u_i, v_j, \omega_k) \notin M$, 则 $(u_i, v_j) \notin M|_{U \times V}, (v_j, \omega_k) \notin M|_{V \times W}, (u_i, \omega_k) \notin M|_{U \times W}$ 至少两个成立。

定理 2 设 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配, 并设三元组 $(u_i, v_j, \omega_k) \notin M$, 则 (u_i, v_j, ω_k) 是匹配 M 的中意对(阻碍对)的充分必要条件是下面 3 个结果成立:

- 1) 当 $(u_i, v_j) \notin M|_{U \times V}$ 时, 则 (u_i, v_j) 是匹配 $M|_{U \times V}$ 的中意对(阻碍对);
- 2) 当 $(v_j, \omega_k) \notin M|_{V \times W}$ 时, 则 (v_j, ω_k) 是匹配 $M|_{V \times W}$ 的中意对(阻碍对);
- 3) 当 $(u_i, \omega_k) \notin M|_{U \times W}$ 时, 则 (u_i, ω_k) 是匹配 $M|_{U \times W}$ 的中意对(阻碍对)。

证明 必要性。若 (u_i, v_j, ω_k) 是匹配 M 的中意对(阻碍对), 如果 $(u_i, v_j) \notin M|_{U \times V}$, 即 $v_j \neq M_V(u_i) (u_i \neq M_U(v_j))$, 所以由定义 2 得到 $\text{pri}(v_j, u_i) > \text{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 与 $\text{pri}(u_i, v_j) > \text{pri}(u_i, M_V(u_i))$, 即证明 (u_i, v_j) 是匹配 $M|_{U \times V}$ 的中意对(阻碍对)。

同理可证 2) 与 3) 的结论。

充分性。当 $(u_i, v_j) \notin M|_{U \times V}$ 是匹配 $M|_{U \times V}$ 的中意对(阻碍对), 则有 $\text{pri}(u_i, v_j) > \text{pri}(u_i, M_V(u_i)), \text{pri}(v_j, u_i) > \text{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 成立。

当 $(v_j, \omega_k) \notin M|_{V \times W}$ 是匹配 $M|_{V \times W}$ 的中意对(阻碍对), 则有 $\text{pri}(v_j, \omega_k) > \text{pri}(v_j, M_W(v_j)), \text{pri}(\omega_k, v_j) > \text{pri}(\omega_k, M_V(\omega_k))$ 成立。

当 $(u_i, \omega_k) \notin M|_{U \times W}$ 是匹配 $M|_{U \times W}$ 的中意对(阻碍对), 则 $\text{pri}(u_i, \omega_k) > \text{pri}(u_i, M_W(u_i)), \text{pri}(\omega_k, u_i) > \text{pri}(\omega_k, M_U(\omega_k))$ 成立。

上述 6 个式子就是定义 2 中的 6 个式子, 所以 (u_i, v_j, ω_k) 是匹配 M 的中意对(阻碍对)。 证毕

定理 3 给定一个三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$, 若 $M(U, V)$ 是一一对双边稳定匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}$ 的稳定匹配, $M(V, W)$ 是一一对双边稳定匹配问题 $P\{V \Leftrightarrow W\}$ 的稳定匹配, 令:

$$M = \{(u_i, v_j, \omega_k) | (u_i, v_j) \in M(U, V), (v_j, \omega_k) \in M(V, W)\},$$

则 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。

证明 显然 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配。设任意 $(u_i, v_j, \omega_k) \notin M$, 要证明 (u_i, v_j, ω_k) 不是匹配 M 的中意对, 就是要证明下列 3 种情况不能全部成立:

- 1) 当 $u_i \neq M_U(v_j)$, 即 $v_j \neq M_V(u_i)$ 时, 有 $\text{pri}(u_i, v_j) > \text{pri}(u_i, M_V(u_i)), \text{pri}(v_j, u_i) > \text{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 成立;
- 2) 当 $v_j \neq M_V(\omega_k)$, 即 $\omega_k \neq M_W(v_j)$ 时, 有 $\text{pri}(v_j, \omega_k) > \text{pri}(v_j, M_W(v_j)), \text{pri}(\omega_k, v_j) > \text{pri}(\omega_k, M_V(\omega_k))$

成立;

- 3) 当 $\omega_k \neq M_W(u_i)$, 即 $u_i \neq M_U(\omega_k)$ 时, 有 $\text{pri}(\omega_k, u_i) > \text{pri}(\omega_k, M_U(\omega_k)), \text{pri}(u_i, \omega_k) > \text{pri}(u_i, M_W(u_i))$

成立。

若 $(u_i, v_j) \in M(U, V)$, 因为 $(u_i, v_j, w_k) \notin M$, 所以 $(v_j, w_k) \notin M(V, W)$ 。因为 $M(V, W)$ 是一一对双边稳定匹配问题 $\{V \Leftrightarrow W\}$ 的稳定匹配, 因此 (v_j, w_k) 不会是 $M(V, W)$ 的中意对(阻碍对), 即: $\text{pri}(v_j, w_k) > \text{pri}(v_j, M_W(v_j))$ 与 $\text{pri}(w_k, v_j) > \text{pri}(w_k, M_V(w_k))$ 不会同时成立, 所以 (u_i, v_j, w_k) 不是匹配 M 的中意对(阻碍对)。

若 $(u_i, v_j) \notin M(U, V)$, 根据 $M(U, V)$ 是一一对双边稳定匹配问题 $\{U \Leftrightarrow V\}$ 的稳定匹配, 同样得到 (u_i, v_j) 不会是 $M(U, V)$ 的中意对(阻碍对), 即: $\text{pri}(u_i, v_j) > \text{pri}(u_i, M_V(u_i))$ 与 $\text{pri}(v_j, u_i) > \text{pri}(v_j, M_U(v_j))$ 不会同时成立, 所以 (u_i, v_j, w_k) 不是匹配 M 的中意对(阻碍对)。

所以匹配 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。 证毕

由于一一对双边稳定匹配问题一定存在稳定匹配^[1], 所以定理 3 的结论保证了三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 也一定存在稳定匹配, 并且可以通过一一对双边稳定匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}$ 的稳定匹配与一一对双边稳定匹配问题 $P\{V \Leftrightarrow W\}$ 的稳定匹配构造得到三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。下面给出相应的算法。

算法 1 步骤 1, 对于双边稳定匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}$, 应用 Gale-Shapley 算法得到稳定匹配 $M(U, V)$;

步骤 2, 对于双边稳定匹配问题 $P\{V \Leftrightarrow W\}$, 应用 Gale-Shapley 算法得到稳定匹配 $M(V, W)$;

步骤 3, 构造三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个匹配:

$$M = \{(u_i, v_j, w_k) \mid (u_i, v_j) \in M(U, V), (v_j, w_k) \in M(V, W)\}。$$

根据定理 3 的结论, 算法 1 所得到的匹配 M 是三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的一个稳定匹配。下面给出一个例子。

例 2 设 3 个主体集 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, 为了方便, 用 $>$ 表示表示偏好。

主体集 U 与主体集 V 之间偏好: $u_1: v_1 > v_2 > v_3; u_2: v_1 > v_2 > v_3; u_3: v_2 > v_3 > v_1; v_1: u_1 > u_3 > u_2; v_2: u_1 > u_2 > u_3; v_3: u_1 > u_3 > u_2;$

主体集 V 与主体集 W 之间偏好: $v_1: w_1 > w_3 > w_2; v_2: w_1 > w_3 > w_2; v_3: w_3 > w_1 > w_2; w_1: v_3 > v_1 > v_2; w_2: v_2 > v_3 > v_1; w_3: v_1 > v_2 > v_3;$

主体集 U 与主体集 W 之间偏好: $u_1: w_1 > w_3 > w_2; u_2: w_1 > w_3 > w_2; u_3: w_1 > w_2 > w_3; w_1: u_3 > u_1 > u_2; w_2: u_1 > u_2 > u_3; w_3: u_2 > u_1 > u_3。$

步骤 1, 应用 Gale-Shapley 算法求解双边匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}$ 的稳定匹配 $M(U, V)$:

1) 对于 $\{v_1, v_2, v_3\}$, u_1 给 v_1 发出邀请; 对于 $\{v_1, v_2, v_3\}$, u_2 给 v_1 发出邀请; 对于 $\{v_1, v_2, v_3\}$, u_3 给 v_2 发出邀请。

2) v_1 拒绝 u_2 的邀请, 接受 u_1 的邀请, 得到一配对 (u_1, v_1) ; v_2 接受 u_3 的邀请, 得到一配对 (u_3, v_2) 。

3) 对于 $\{v_2, v_3\}$, u_2 给 v_2 发出邀请。

4) v_2 拒绝 u_3 的邀请, 配对 (u_3, v_2) 不再存在, 接受 u_2 的邀请, 得到一配对 (u_2, v_2) 。

5) 对于 $\{v_1, v_3\}$, u_3 给 v_3 发出邀请。

6) v_3 接受的邀请 u_3 , 得到一配对 (u_3, v_3) 。

7) 得到双边稳定匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V\}$ 的稳定匹配 $M(U, V) = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)\}$ 。

步骤 2, 同样应用 Gale-Shapley 算法求解双边匹配问题 $P\{V \Leftrightarrow W\}$ 的稳定匹配 $M(V, W) = \{(v_1, w_3), (v_2, w_2), (v_3, w_1)\}$ 。

步骤 3, 得到三方匹配问题 $P\{U \Leftrightarrow V, V \Leftrightarrow W, W \Leftrightarrow U\}$ 的稳定匹配 $M = \{(u_1, v_1, w_3), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_1)\}$ 。

参考文献:

- [1] GALE D, SHAPLEY L S. College admissions and the stability of marriage[J]. American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9-15.
- [2] MANLOVE D F. The structure of stable marriage with indifference[J]. Discrete Applied Mathematics, 2002, 122(1/2/3): 167-181.
- [3] KOBAYASHI H, MATSUI T. Cheating strategies for the Gale-shapley algorithm with complete preference lists[J]. Algorithmica, 2010, 58(1): 151-169.
- [4] VANDE V J H. Linear programming brings marital bliss[J]. Operations Research Letters, 1989, 8(3): 147-153.
- [5] AFACAN M O. Group robust stability in matching mar-

- kets [J]. Games and Economic Behavior, 2012, 74(1): 394-398.
- [6] ROTH A E. Two-sided matching with incomplete information about others' preferences [J]. Games and Economic Behavior, 1989, 1(2): 191-209.
- [7] GELAIN M, PINI M S, ROSSI F, et al. Local search for stable marriage problems with ties and incomplete lists [C]//ZHANG B T, ORGUN M A. PRICAI 2010, LNAI 6230: 64-75.
- [8] 李建荣. 多对一双方匹配市场中的最优化[J]. 运筹学学报, 2013, 17(4): 1-10.
LI J R. Optimization in many-to-one two-sided matching market[J]. Operations Research Transactions, 2013, 17(4): 1-10.
- [9] ROMM A. Implications of capacity reduction and entry in many-to-one stable matching[J]. Social Choice and Welfare, 2014, 43(4): 851-875.
- [10] McDERMID E J, MANLOVE D F. Keeping partners together; algorithmic results for the hospitals/residents problem with couples[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2010, 19(3): 279-303.
- [11] MANLOVE D F, McBRIDE I, TRIMBLE J. "Almost-stable" matchings in the hospitals/residents problem with couples[J]. Constraints, 2017, 22(1): 50-72.
- [12] IRVING R W, MANLOVE D F. The stable roommates problem with ties[J]. Journal of Algorithms, 2002, 43(1): 85-105.
- [13] PYCIA M. Stability and preference alignment in matching and coalition formation [J]. Econometrica, 2012, 80(1): 323-362.
- [14] ANSHELEVICH E, BHARDWAJ O, HOEFER M. Stable matching with network externalities [J]. Algorithmica, 2017, 78(3): 1-40.
- [15] McDERMID E, IRVING R W. Sex-Equal stable matchings: complexity and exact algorithms [J]. Algorithmica, 2014, 68(3): 545-570.
- [16] LAZAROVA E, BORM P, ESTÉVEZ-FERNÁNDEZ A. Transfers and exchange-stability in two-sided matching problems [J]. Theory and Decision, 2016, 81(1): 53-71.
- [17] NG C, HIRSCHBERG D S. Three-dimensional stable matching problems [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1991, 4(2): 245-252.
- [18] HUANG C C. Circular Stable Matching and 3-way Kidney Transplant [J]. Algorithmica, 2010, 58(1): 137-150.
- [19] ERIKSSON K, SJÖSTRAND J, STRIMLING P. Three-dimensional stable matching with cyclic preferences [J]. Mathematical Social Sciences, 2006, 52(1): 77-87.
- [20] BIRÓP, McDERMID E. Three-sided stable matchings with cyclic preferences [J]. Algorithmica, 2010, 58(1): 5-18.
- [21] ZHANG F, LI J, FAN J, et al. Three-dimensional stable matching with hybrid preferences [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2019, 37(1): 330-336.

Operations Research and Cybernetics

Three-Sided Stable Matching Problem with Independent Preferences

ZHANG Feng^{1,2}, ZHONG Liwei³

(1. Research Center of Resource Recycling Science and Engineering, Shanghai Polytechnic University;

2. Art and Science Department, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209;

3. Shanghai General Hospital, School of Medicine, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200080, China)

Abstract: [Purposes] The three-sided matching problem is discussed here. Relevant results and algorithm are obtained. [Methods] The results of the one-to-one two-sided matching problem derived from the three-sided matching problem are used to obtain the relevant results of the three-sided matching problem. [Findings] For the three-sided matching problem with independent preferences, the concept of stable matching is given, the existence of stable matching is proved, and the algorithm to solve stable matching is given. [Conclusions] The results and algorithms of three-sided matching problem with independent preferences discussed provide a new approach for the research and application of three-sided matching problems.

Keywords: agent set; three-sided matching problem; preference; stable matching

(责任编辑 黄 颖)

多目标优化问题 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -拟真有效解的一个充分条件*

马圆圆, 彭建文

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】对多目标优化问题 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -拟真有效解的充分条件进一步研究和推广。【方法】利用多目标优化问题的广义加权切比雪夫标量化问题或改进的加权切比雪夫标量化问题。【结果】在没有任何凸性假设的情况下,得到了多目标优化问题的 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -拟真有效解的一个新的充分条件。【结论】推广了已有文献中的结果。

关键词:多目标优化;近似拟真有效解;非线性标量化

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)02-0006-05

多目标优化问题在许多领域如经济、工程、医学等方面都有着广泛的应用。在多目标优化问题中解的定义是十分重要的研究课题,因此,许多学者引进了各种意义下解的概念,主要有:有效解、弱有效解和各种真有效解。然而,多目标优化问题的有效解(或弱有效解)在非紧的情况下,往往并不存在,但其近似解在条件很弱的情况下可能是存在的。数值优化问题中,近似解的概念是由 Kutateladze^[1]在1979年首次提出的。在1986年,White^[2]研究了多目标优化问题的6种 ϵ -近似有效解。1999年,Liu^[3]提出了 ϵ -真有效解的概念,并得出相关的标量化性质。2008年 Beldman 等人^[4]给出了多目标优化问题 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -近似拟真有效解的概念。2013年 Ghaznavi-ghosoni 等人^[5]给出了多目标优化问题 ϵ - (弱,真)有效解的一些充分条件和必要条件。2015年, Yue 和 Gao^[6]给出了多目标优化问题的 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -拟近似(弱)有效解的充分条件和必要条件。2017年, Ghaznavi^[7]利用两种标量化方法给出了多目标优化问题的 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -拟近似(弱,真)有效解的充分条件。

本文对文献[7]中的多目标优化问题 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -近似拟真有效解的充分条件进行了改进,使得 λ_i 及 $\delta, \bar{\delta}, \epsilon, \bar{\epsilon}$ 的取值范围变得更加广泛。

1 预备知识

在本文中,需要以下偏序关系:对任意的 $x, y \in \mathbf{R}^n, x < y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{R}_+^n \setminus \{0\}, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{R}_+^n$ 。

考虑如下的多目标优化问题:

$$(MOP) \quad \min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), x \in X.$$

其中, $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, $f: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ 。

定义 1^[8] 考虑(MOP):

- 1) 称点 $y^I = (y_1^I, y_2^I, \dots, y_m^I)$ 为(MOP)的理想点, 其中 $y_i^I = \min_{x \in X} f_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ 。
- 2) 称点 $y^U = (y_1^U, y_2^U, \dots, y_m^U)$ 为(MOP)的乌托邦点, 其中 $y_i^U = y_i^I - \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$, 且 $\alpha \in \mathbf{R}_{>}^m$ 。

定义 2^[4] 设 $(\epsilon, \bar{\epsilon}) \in \mathbf{R}_{\geq}^m \times \mathbf{R}_{\geq}^m, \hat{x} \in X$:

- 1) 称 \hat{x} 为(MOP)的 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -近似拟有效解, 若不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) \leq f(\hat{x}) - \epsilon \|x - \hat{x}\| - \bar{\epsilon}$ 。
- 2) 称 \hat{x} 为(MOP)的 $(\epsilon, \bar{\epsilon})$ -近似拟弱有效解, 若不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) < f(\hat{x}) - \epsilon \|x - \hat{x}\| - \bar{\epsilon}$ 。

* 收稿日期:2017-11-09 修回日期:2019-01-22 网络出版时间:2019-03-15 07:00

资助项目:重庆市基础科学与前沿技术研究专项重点项目(No. cstc2015jcyjBX0029);国家自然科学基金面上项目(No. 11171363)

第一作者简介:马圆圆,女,研究方向为向量优化理论,E-mail:mayuanyuan@163.com;通信作者:彭建文,男,教授,博士生导师,E-mail:jw-peng168@hotmail.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190315.0057.024.html>

3) 称 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解,若 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟有效解,且存在 $M > 0$,使得对于满足 $f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) - \varepsilon_i \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| - \bar{\varepsilon}_i$ 的任何 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $\boldsymbol{x} \in X$,存在 $j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i\}$,使得 $f_j(\boldsymbol{x}) > f_j(\hat{\boldsymbol{x}}) - \varepsilon_j \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| - \bar{\varepsilon}_j$,且 $\frac{f_j(\hat{\boldsymbol{x}}) - f_i(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_i \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| - \bar{\varepsilon}_i}{f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\hat{\boldsymbol{x}}) + \varepsilon_j \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| + \bar{\varepsilon}_j} \leq M$ 。

考虑如下单目标优化问题:

$$(P) \quad \min \varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in X,$$

其中 $\varphi: X \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 。

定义 3^[4] 设 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}}) \in \mathbf{R}_{\geq} \times \mathbf{R}_{\geq}$, $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$:

1) 称 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为(P)的 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -近似拟最优解,若 $\varphi(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq \varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\delta} \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| + \bar{\boldsymbol{\delta}}, \forall \boldsymbol{x} \in X$ 。

2) 称 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为(P)的严格 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -近似拟最优解,若 $\varphi(\hat{\boldsymbol{x}}) < \varphi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\delta} \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| + \bar{\boldsymbol{\delta}}, \forall \boldsymbol{x} \in X$ 。

Steuer 和 Choo^[9]考虑了如下的广义加权切比雪夫标量化问题(SOP1):

$$(SOP1) \quad \min \max_{i \in I} \left[\lambda_i (f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U) \right], \boldsymbol{x} \in X,$$

其中, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, y^U 是乌托邦点, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \in \mathbf{R}_{\geq}^m$ 。

Kaliszewski^[10]考虑了如下的改进的加权切比雪夫标量化问题(SOP2):

$$(SOP2) \quad \min \max_{i \in I} \lambda_i \left[(f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U) \right], \boldsymbol{x} \in X,$$

其中, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, y^U 是乌托邦点, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \in \mathbf{R}_{\geq}^m$ 。

引理 1^[7] 设 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \in \mathbf{R}_{\geq}^m \times \mathbf{R}_{\geq}^m$, $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$, 则:

1) $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(SOP1)的 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -近似拟最优解,且 $\boldsymbol{\delta} \leq \min_{i \in I} \{\lambda_i \varepsilon_i\} + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i$, $\bar{\boldsymbol{\delta}} \leq \min_{i \in I} \{\lambda_i \bar{\varepsilon}_i\} + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟有效解。

\mathbf{R}_{\geq}^m , 则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟有效解。

2) $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(SOP2)的 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -近似拟最优解,且 $\boldsymbol{\delta} \leq \min_{i \in I} \lambda_i (\varepsilon_i + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i)$, $\bar{\boldsymbol{\delta}} \leq \min_{i \in I} \lambda_i (\bar{\varepsilon}_i + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i)$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟有效解。

\mathbf{R}_{\geq}^m , 则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟有效解。

2 主要结果

文献[7]利用文献[4]的定理 5,研究了(MOP)基于(SOP1)和(SOP2)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -拟真有效解的充分条件,得到了如下定理:

定理 1^[7] 设 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \in \mathbf{R}_{\geq}^m \times \mathbf{R}_{\geq}^m$:

1) $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(SOP1)的 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -近似拟最优解,且 $\boldsymbol{\delta} = \max_{i \in I} \left[\{\lambda_i \varepsilon_i\} + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i \right]$, $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \max_{i \in I} \left[\{\lambda_i \bar{\varepsilon}_i\} + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i \right]$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 且 y_i^U 满足 $\forall i \in I, \lambda_i = [f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U]^{-1} > 0$, 则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解。

2) $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(SOP2)的 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -近似拟最优解,且 $\boldsymbol{\delta} = \max_{i \in I} \lambda_i (\varepsilon_i + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i)$, $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \max_{i \in I} \lambda_i (\bar{\varepsilon}_i + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i)$, 其中 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 且 y_i^U 满足对于 $\forall i \in I$, 都有如下的关系成立: $\lambda_i = [f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) - y_i^U)]^{-1} > 0$ 。

则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解。

在定理 1 中 λ_i , $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ 的取值是事先给定的固定值。比如: λ_i 的取值为: $\lambda_i = [f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U]^{-1}$ 或者 $\lambda_i = [f_i(\boldsymbol{x}) - y_i^U + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) - y_i^U)]^{-1}$ 。下面对定理 1 中 λ_i 及 $\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}}$ 的取值进行了修正,使它们的取值不再是一个固定值,而是在某个取值范畴内即可。同时将原来对 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 的取值范围也由 $\mathbf{R}_{\geq}^m \times \mathbf{R}_{\geq}^m$ 放宽为 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \in \mathbf{R}_{\geq}^m \times \mathbf{R}_{\geq}^m$ 。改进后的结论如下:

定理 2 设 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \in \mathbf{R}_{\geq}^m \times \mathbf{R}_{\geq}^m$:

1) $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(SOP1)的 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -近似拟最优解,且 $\boldsymbol{\delta} \leq \min_{i \in I} \{\lambda_i \varepsilon_i\} + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i$, $\bar{\boldsymbol{\delta}} \leq \min_{i \in I} \{\lambda_i \bar{\varepsilon}_i\} + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解。

2) \hat{x} 是(SOP2)的 $(\delta, \bar{\delta})$ -近似拟最优解,且 $\delta \leq \min_{i \in I} \lambda_i (\varepsilon_i + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i)$, $\bar{\delta} \leq \min_{i \in I} \lambda_i (\bar{\varepsilon}_i + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i)$, $\rho \in \mathbf{R}^m$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, 则 \hat{x} 是(MOP)的 $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ -近似拟真有效解。

证明 1) 令 $M = \max_{i, l \in I} \left\{ \frac{\lambda_l + \sum_{i \in I} \rho_i}{\rho_i} \right\}$, 对于 $\forall i \in I$ 并且 $\hat{x} \in X$ 满足 $f_i(x_0) < f_i(\hat{x}) - \varepsilon_i \|x_0 - \hat{x}\| - \bar{\varepsilon}_i$ 。为了证明

\hat{x} 为(MOP)的 $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ -拟真有效解,需证明存在 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得:

$$f_j(\hat{x}) < f_j(x_0) + \varepsilon_j \|x_0 - \hat{x}\| + \bar{\varepsilon}_j,$$

且:

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x_0) - \varepsilon_i \|x_0 - \hat{x}\| - \bar{\varepsilon}_i}{f_j(x_0) - f_j(\hat{x}) + \varepsilon_j \|x_0 - \hat{x}\| + \bar{\varepsilon}_j} \leq M.$$

由引理 1 可知, \hat{x} 为(MOP)的 $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ -拟有效解,且 $x_0 \in X$, 所以存在 $t \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得:

$$f_t(\hat{x}) - \varepsilon_t \|x_0 - \hat{x}\| - \bar{\varepsilon}_t < f_t(x_0).$$

定义:

$$f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j \|x_0 - \hat{x}\| - \bar{\varepsilon}_j - f_j(x_0) = \min_{i \in I} [f_i(\hat{x}) - \varepsilon_i \|x_0 - \hat{x}\| - \bar{\varepsilon}_i - f_i(x_0)], \quad (1)$$

所以有

$$f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j \|x_0 - \hat{x}\| - \bar{\varepsilon}_j - f_j(x_0) < 0.$$

又因为 \hat{x} 为(SOP1)的 $(\delta, \bar{\delta})$ -近似拟最优解,故有:

$$\begin{aligned} & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u)] + \delta \|x_0 - \hat{x}\| + \bar{\delta} \geq \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(\hat{x}) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(\hat{x}) - y_i^u)]. \end{aligned} \quad (2)$$

根据(2)式,有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u) + (\lambda_k \varepsilon_k + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i) \|x_0 - \hat{x}\| + (\lambda_k \bar{\varepsilon}_k + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i)] \geq \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u)] + \min_{k \in I} [(\lambda_k \varepsilon_k + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i) \|x_0 - \hat{x}\| + (\lambda_k \bar{\varepsilon}_k + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i)] \geq \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u)] + \min_{k \in I} (\lambda_k \varepsilon_k + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i) \|x_0 - \hat{x}\| + \min_{k \in I} (\lambda_k \bar{\varepsilon}_k + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i) \geq \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u)] + \delta \|x_0 - \hat{x}\| + \bar{\delta} \geq \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(\hat{x}) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(\hat{x}) - y_i^u)]. \end{aligned}$$

所以有如下结果:

$$\begin{aligned} & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u) + \\ & (\lambda_k \varepsilon_k + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i) \|x_0 - \hat{x}\| + (\lambda_k \bar{\varepsilon}_k + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i)] \geq \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(\hat{x}) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(\hat{x}) - y_i^u)]. \end{aligned} \quad (3)$$

这里标记等式:

$$\begin{aligned} & \lambda_l (f_l(x_0) - y_l^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u) + (\lambda_l \varepsilon_l + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i) \|x_0 - \hat{x}\| + (\lambda_l \bar{\varepsilon}_l + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i) = \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u) + (\lambda_k \varepsilon_k + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i) \|x_0 - \hat{x}\| + (\lambda_k \bar{\varepsilon}_k + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i)]. \end{aligned} \quad (4)$$

故由(3)式和(4)式有:

$$\begin{aligned} & \lambda_l (f_l(x_0) - y_l^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u) + (\lambda_l \varepsilon_l + \sum_{i \in I} \rho_i \varepsilon_i) \|x_0 - \hat{x}\| + (\lambda_l \bar{\varepsilon}_l + \sum_{i \in I} \rho_i \bar{\varepsilon}_i) \geq \\ & \max_{k \in I} [\lambda_k (f_k(x_0) - y_k^u) + \sum_{i \in I} \rho_i (f_i(x_0) - y_i^u)] + \delta \|x_0 - \hat{x}\| + \bar{\delta} \geq \end{aligned}$$

$$\lambda_l(f_l(\hat{\mathbf{x}}) - y_l^u) + \sum_{t \in I} \rho_t(f_t(\hat{\mathbf{x}}) - y_t^u)。$$

则有:

$$\lambda_l(f_l(\hat{\mathbf{x}}) - f_l(\mathbf{x}_0)) - \lambda_l \varepsilon_l \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \lambda_l \bar{\varepsilon}_l + \sum_{t \in I} \rho_t [f_t(\hat{\mathbf{x}}) - f_t(\mathbf{x}_0) - \varepsilon_t \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \bar{\varepsilon}_t] \leq 0,$$

即:

$$\lambda_l(f_l(\hat{\mathbf{x}}) - f_l(\mathbf{x}_0) - \varepsilon_l \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \bar{\varepsilon}_l) + \sum_{t \in I} \rho_t [f_t(\hat{\mathbf{x}}) - f_t(\mathbf{x}_0) - \varepsilon_t \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \bar{\varepsilon}_t] \leq 0。$$

由(1)式得:

$$\lambda_l(f_j(\hat{\mathbf{x}}) - f_j(\mathbf{x}_0) - \varepsilon_j \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \bar{\varepsilon}_j) + \sum_{t \in I} \rho_t [f_t(\hat{\mathbf{x}}) - f_t(\mathbf{x}_0) - \varepsilon_t \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \bar{\varepsilon}_t] \leq 0,$$

所以有:

$$\begin{aligned} \rho_i(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}_0) - \varepsilon_i \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \bar{\varepsilon}_i) &\leq \lambda_l(f_j(\mathbf{x}_0) - f_j(\hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon_j \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| + \bar{\varepsilon}_j) + \\ \sum_{t \in I, t \neq i} \rho_t [f_t(\mathbf{x}_0) - f_t(\hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon_t \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| + \bar{\varepsilon}_t] &\leq (\lambda_l + \sum_{t \in I, t \neq i} \rho_t) (f_j(\mathbf{x}_0) - f_j(\hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon_j \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| + \bar{\varepsilon}_j)。 \end{aligned}$$

得到如下不等式:

$$\frac{f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}_0) - \varepsilon_i \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| - \bar{\varepsilon}_i}{f_j(\mathbf{x}_0) - f_j(\hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon_j \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| + \bar{\varepsilon}_j} \leq \frac{\lambda_l + \sum_{t \in I, t \neq i} \rho_t}{\rho_i} \leq M。$$

因此 1) 证明完成。

2) 证明过程与 1) 相似。

证毕

注 1 当 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=0$ 时,定理 2 退化为文献[5]中的定理 4.8,当 $\boldsymbol{\varepsilon}=\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=0$ 时,定理 2 退化为文献[11]中的定理 6.2,所以定理 2 是文献[5]和文献[11]相应结果的推广。

例 1 考虑如下多目标优化问题:

$$\min f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) = (x_1, x_2), \mathbf{x} \in X,$$

其中, $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 + x_2 > 2, x_1, x_2 > 0\}$, 设 $\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (0.1, 0.1)$, $\mathbf{y}^U = (-1, -1)$ 。对于广义加权切比雪夫标量化问题(SOP1), 令 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2) = (0, 0)$ 。由定理 2 的条件 $\boldsymbol{\delta} \leq \min_{i \in I} \{\lambda_i \varepsilon_i\} + \sum_{t \in I} \rho_t \varepsilon_t$,

$\bar{\boldsymbol{\delta}} \leq \min_{i \in I} \{\lambda_i \bar{\varepsilon}_i\} + \sum_{t \in I} \rho_t \bar{\varepsilon}_t$, 得 $\boldsymbol{\delta} = 0.1, \bar{\boldsymbol{\delta}} = 0.1$ 。因此, 相应的标量化问题如下:

$$(SOP3) \quad \min_{\mathbf{x} \in X} \max_{i=1,2} \{x_i + 1\}。$$

容易得出: $\hat{\mathbf{x}} = (1.1, 1.1)$ 是(SOP3)的 $(\boldsymbol{\delta}, \bar{\boldsymbol{\delta}})$ -拟最优解, 因此, 由定理 2 知 $\hat{\mathbf{x}}$ 是所给多目标优化问题的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解。

3 总结

本文在没有任何凸性的假设下, 通过利用标量化技术去考虑了(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解。研究了(MOP)的近似拟真有效解与(SOP)的近似拟最优解之间的关系, 利用广义加权切比雪夫标量化问题或改进的加权切比雪夫标量化问题, 得到了(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解的另一个充分条件, 使得定理中的 $\lambda_i, \boldsymbol{\delta}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ 的取值不再是一个固定值, 而是在某个取值范畴内即可。文献[7]中也给出了(MOP)的 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -近似拟真有效解的充分条件, 但其中的 $\lambda_i, \boldsymbol{\delta}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ 的取值是固定的, 事实上, 本文结果是文献[7]中相应结果的改进。

参考文献:

[1] KUTATELADZE S S. Convex programming[J]. Sov Math Dokl, 1979, 20: 390-393.
 [2] WHITE D J. Epsilon efficiency[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1986, 49(2): 319-337.
 [3] LIU J C. $\boldsymbol{\varepsilon}$ -Properly efficient solution to nondifferentiable multiobjective programming problems[J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12: 109-113.
 [4] BELDIMAN M, PANAITESCU E, DOGARU L. Approximate quasi efficient solutions in multiobjective optimization [J]. Bull Math Soc Math Roumanie Tome, 2008, 51(99):

109-121.

- [5] GHAZNAVI-GHOSONI B A, KHORRAM E, SOLEIMANI-DAMANEH M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multiobjective optimization[J]. Optimization, 2013, 62(6):703-720.
- [6] YUE R X, GAO Y. Scalarizations for approximate quasi efficient solutions in multiobjective optimization problems [J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2015, 3:69-80.
- [7] GHAZNAVI M. Optimality condition via scalarization for approximate quasi efficiency in multiobjective optimization [J]. Filomat, 2017, 31(3):671-680.
- [8] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin: Springer, 2005.
- [9] STEUER R E, CHOO E U. An interactive weighted tchebyche procedure for multiple objective programming [J]. Mathematical Programming, 1983, 26(3):326-344.
- [10] KALISZEWSKI I. A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming [J]. Computers and Operations Research, 1987, 14(4):315-323.
- [11] KALISZEWSKI I, MICHALOWSKI W. Efficient solutions and bounds on tradeoffs [J]. Journal of Optimization, Theory and Applications, 1997, 94(2):381-394.

Operations Research and Cybernetics

A Sufficient Condition for $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -Approximate Quasi Properly Solutions of Multiobjective Optimization Problems

MA Yuanyuan, PENG Jianwen

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The sufficient condition for $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -approximate quasi properly efficient solutions of multiobjective optimization problems are studied and generalized further. [Methods] By using the augmented weighted Tchebycheff scalarization problem of multiobjective optimization problem or the modified weighted Tchebycheff scalarization problem of multiobjective optimization problem. [Findings] It derives a new sufficient condition for $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ -approximate quasi properly efficient solutions of multiobjective optimization problems without any convexity conditions. [Conclusions] The results are extended in the existing literature.

Keywords: multiobjective optimization; quasi properly efficient solutions; nonlinear scalarization

(责任编辑 陈 乔)

基于 Push-Sum 的分布式 Gradient-Free 算法研究*

余淑辉, 李觉友, 杜学武
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】提出了 push-sum 协议下的分布式 gradient-free 算法来求解一类有向网络的多智能体分布式优化问题。【方法】首先用 Gaussian 光滑化方法来逼近非可微函数,其次采用 push-sum 通讯协议考虑有向网络中的分布式 gradient-free 算法。【结果】分析了算法的收敛性,并得到了算法的收敛率为 $O(\ln \tau / \tau)$,其中 τ 是迭代次数。【结论】数值例子表明了所提出的算法与对应的分布式次梯度算法具有相似的收敛性。

关键词:多智能体网络;分布式优化;gradient-free;push-sum 协议

中图分类号:O224;O236

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)02-0011-07

1 背景介绍

当今社会,网络已成为生活中不可或缺的设施系统,如无线网络、电网、交通网络、供应链等。这些系统有一个共同特征即它们均由许多子系统组成,而这些子系统由一群具备一定的感知、通信、计算和执行能力的智能个体通过相互通讯等方式关联成的网络系统,通常称之为多智能体系统(Multi-agent system)^[1-2]。目前有许多文献研究了基于多智能体系统的分布式优化问题^[3-8],凸优化问题是其中研究的重点之一^[5-11],目前大多采用次梯度方法^[5-9]来求解。文献[6]较早讨论了多智能体网络凸优化的分布式次梯度算法,并给出了算法的收敛性分析。对于分布式强凸优化问题,文献[7]提出了分布式随机次梯度算法。但许多实际问题中的目标函数是不可微的^[13],其次梯度往往难以计算,有时甚至不可用^[12,14]。最近,Duchi 等人^[12]提出了一类光滑化方法来求解随机凸优化问题,该方法仅利用函数值信息,不需要梯度信息。但他们的方法是中心化的,并未考虑分布式情形。随后,文献[14]利用 Gaussian 光滑化方法来光滑化非可微目标函数,并提出了一种 gradient-free 分布式优化算法来求解一类非光滑的分布式优化问题。该算法只需计算函数值的信息,而不需要次梯度的信息。但是,文献[14]所提出的算法仅适用于无向网络拓扑。而大多数通讯网络是有向的。最近,文献[7]首次提出了 push-sum 算法,该算法考虑的是时变有向网络拓扑下的分布式优化,但此算法需要计算次梯度,而次梯度信息往往是不容易得到的^[12,14]。

受文献[7,12]的启发,针对强凸优化问题,本文提出了一个有向网络下的分布式 gradient-free 算法,分析了算法的收敛性,并给出了算法的收敛率。通过数值试验,验证了算法的可行性和有效性。与文献[7]的算法相比,本文的算法不需要计算目标函数的次梯度,仅仅需要计算函数值。同时将文献[12]的 gradient-free 方法推广到了分布式情形。与文献[14]所提出的算法不同的是,本文的算法适用于有向网络。

2 问题与算法

2.1 问题

多智能体网络往往需要所有智能体相互协作来极小化几个目标函数之和,其中每个智能体仅知道自身目标函数信息,并通过与其他智能体局部交换信息来达到全局最优。具体考虑如下一类多智能体分布式优化问题:

* 收稿日期:2018-03-07 修回日期:2018-12-26 网络出版时间:2019-01-09 07:38

资助项目:国家自然科学基金(No. 11501070);重庆市自然科学基金(No. cstc2017jcyjAX0253);重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJQN201800520)

第一作者简介:余淑辉,女,研究方向分布式理论与算法,E-mail:503023849@qq.com;通信作者:李觉友,男,副教授,博士,E-mail:lijueyou@cqnu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190109.0731.042.html>

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^d} F(\mathbf{z}) \triangleq \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{z}). \quad (1)$$

其中,每个智能体 i 仅持有目标函数 $f_i: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}, i=1, \dots, n, \mathbf{z}$ 是一个全局决策向量。

假设 1 a) 对 $i=1, \dots, n$, 每个 f_i 是非可微的, 并且是 μ_i -强凸^[12] 的, 其中 $\mu_i > 0$; b) 每个 f_i 是 L_i -Lipschitz 连续^[12] 的, 其中 $L_i > 0$ 。记 $L = L_1 + \dots + L_n$ 。

在假设 1 的情形下, 问题(1)存在唯一全局最优解, 记为 \mathbf{z}^* , 即 $\mathbf{z}^* = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^d} F(\mathbf{z})$ 。

引理 1^[6] 如果 f_i 是凸的非光滑函数, 令 $\tilde{f}_i(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbf{R}^d} f_i(\mathbf{z} + \sigma_i \boldsymbol{\varphi}) e^{-\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\varphi}\|^2} d\boldsymbol{\varphi}$, 其中 σ_i 是一个正的光滑化参数, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{R}^d$ 是一个服从标准正太分布的随机向量, 那么:

- $\tilde{f}_i(\mathbf{z})$ 是凸函数, 且满足 $f_i(\mathbf{z}) \leq \tilde{f}_i(\mathbf{z}) \leq f_i(\mathbf{z}) + \sqrt{d} \sigma_i L_i$;
- $\tilde{f}_i(\mathbf{z})$ 是可微函数, 并且它的梯度为 $\nabla \tilde{f}_i(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{f_i(\mathbf{z} + \sigma_i \boldsymbol{\varphi}) - f_i(\mathbf{z})}{\sigma_i} \boldsymbol{\varphi} e^{-\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\varphi}\|^2} d\boldsymbol{\varphi}$;
- 令 $\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{z}) = \frac{f_i(\mathbf{z} + \sigma_i \boldsymbol{\varphi}) - f_i(\mathbf{z})}{\sigma_i} \boldsymbol{\varphi}$, 则有 $E[\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{z})] = \nabla \tilde{f}_i(\mathbf{z})$ 和 $E[|\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{z})|^2] \leq (d+4)^2 L_i^2$ 。

引理 1 指出: $\tilde{f}_i(\mathbf{z})$ 是 $f_i(\mathbf{z})$ 的 Gaussian 光滑化逼近, 并且具有可微等良好性质。

若将网络中每个智能体看作是一个节点, 则多智能体网络中智能体之间的通讯可以用一个时变的有向图 $G(t) = (V, E(t))$ 来表示, 其中 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 为节点的集合, $E(t) \subseteq V \times V$ 为边的集合。用 $N_i^{\text{in}}(t)$ 和 $N_i^{\text{out}}(t)$ 分别表示在时间 t 时对智能体 i 传入和传出的邻居节点的集合, 记 $N_i^{\text{in}}(t) = \{j | (j, i) \in E(t)\} \cup \{i\}$, $N_i^{\text{out}}(t) = \{j | (i, j) \in E(t)\} \cup \{i\}$ 。用 $d_i(t)$ 表示个体 i 在 t 时刻的外度, 即 $d_i(t) = |N_i^{\text{out}}(t)|$ 。定义通讯权矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 如下:

$$[\mathbf{A}(t)]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_j(t)}, & j \in N_i^{\text{in}}(t) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (2)$$

事实上, 矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 是列随机矩阵^[7]。

假设 2 a) 在有向图 $G(t)$ 中, 智能体 i 通过边 (i, j) 传递给智能体 $j \in N_i^{\text{out}}(t)$, 智能体 i 仅知道自身的外度 $d_i(t)$; b) 有向图序列 $\{G(t)\}$ 是 B -强连通的, 即存在一个正整数 B , 使得对于任意的正整数 k , $E_B(k) = E(kB) \cup E(kB+1) \cup \dots \cup E((k+1)B-1)$ 是强连通的。

2.2 分布式 Gradient-free 算法

对于许多非光滑的凸优化问题, 次梯度信息不容易得到, 甚至不可用^[12]。为此, 提出了一种分布式 gradient-free 算法(简称算法 GFD), 同时考虑了有向网络下的分布式优化算法。

算法 GFD 1) 初始化, 对每个智能体 i , 设置 $y_i(0) = 1$, 随机取 $\mathbf{x}_i(0) \in \mathbf{R}^d, i=1, \dots, n$;

2) 对于所有的 $t > 0$ 和对每个智能 $i, i=1, \dots, n$, 按照如下规则更新:

$$\mathbf{w}_i(t+1) = \sum_{j=1}^n [\mathbf{A}(t)]_{ij} \mathbf{x}_j(t), \quad (3)$$

$$y_i(t+1) = \sum_{j=1}^n [\mathbf{A}(t)]_{ij} y_j(t), \quad (4)$$

$$\mathbf{z}_i(t+1) = \frac{\mathbf{w}_i(t+1)}{y_i(t+1)}, \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{w}_i(t+1) - \alpha(t+1) \tilde{\mathbf{g}}_i(t+1). \quad (6)$$

其中, 步长序列 $\{\alpha(t)\}_{t=0}^{\infty}$ 是非负单调递减的, $\tilde{\mathbf{g}}_i(t+1)$ 是按照如下方式计算:

$$\tilde{\mathbf{g}}_i(t+1) = \frac{f_i(\mathbf{z}_i(t+1) + \sigma_i \boldsymbol{\varphi}_i(t+1)) - f_i(\mathbf{z}_i(t+1))}{\sigma_i} \boldsymbol{\varphi}_i(t+1), \quad (7)$$

这里 $\sigma_i > 0$ 是光滑化参数, $\boldsymbol{\varphi}_i(t+1) \in \mathbf{R}^d$ 是一个服从标准正态分布的随机向量。

注 1 1) 在算法 GFD 中, 首先智能体 j 发出信息 $\mathbf{x}_j(t)$ 和 $y_j(t)$ 给所有的智能体 $i \in N_j^{\text{out}}(t)$, 然后智能体 i 加权求和所有智能体 $j \in N_i^{\text{out}}(t)$ 的信息, 即(3), (4)式。最后智能体 i 执行局部计算, 即(5), (6)式。

2) 算法 GFD 不需要计算 f_i 的次梯度, 而仅仅计算它的函数值, 即(7)式。这对许多实际工程问题非常有帮助。事实上, 还可以按照如下方式计算 $\tilde{\mathbf{g}}_i(t+1)$:

$$\tilde{\mathbf{g}}_i(t+1) = \frac{f_i(\mathbf{z}_i(t+1) + \sigma_i \boldsymbol{\varphi}_i(t+1)) - f_i(\mathbf{z}_i(t+1) - \sigma_i \boldsymbol{\varphi}_i(t+1))}{2\sigma_i} \boldsymbol{\varphi}_i(t+1).$$

引理 2^[15] 在假设 1 和 2 成立情形下,并且还假设存在常数 $D > 0$,使得 $E[\|\alpha(t)\tilde{\mathbf{g}}_i(t)\|_1] \leq \frac{D}{t}$ 成立,那么对

任意的 $t \geq 1$,有 $E\left[\left\|\sum_{t=1}^{\tau} \left[\mathbf{z}_i(t+1) - \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j(t)}{n}\right]\right\|\right] \leq \frac{8}{\delta} \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j(0)\|_1 + \frac{8}{\delta} \frac{Dn}{1-\lambda} (1 + \ln \tau)$, 其中常数 $\delta > 0$ 和 $\lambda \in (0, 1)$,并满足 $\delta \geq \frac{1}{n^{nB}}$, $\lambda \leq \left(1 - \frac{1}{n^{nB}}\right)^{\frac{1}{nB}}$.

定义 σ -代数 $\mathcal{F}_{t+1} = \{\mathbf{z}_i(k), i=1, 2, \dots, n; (\mathbf{x}_i(0), i=1, 2, \dots, n); 1 \leq k \leq t+1\}$. 下面给出算法 GFD 的主要收敛性结果.

定理 1 若假设 1 和 2 成立,序列 $\{\mathbf{z}_i(t+1)\}_{i=0}^{\infty}$ 由算法 GFD 迭代产生.对任意的智能体 i 和所有的 $t \geq 0$,有:

$$\begin{aligned} E[F(\mathbf{z}_j(t+1)) | \mathcal{F}_{t+1}] - F(\mathbf{z}^*) &\leq \frac{n}{\alpha(t+1)} \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 - \frac{n}{\alpha(t+1)} E[\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{z}^*\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}] - \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j\right) \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 + LE[\|\mathbf{z}_i(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| | \mathcal{F}_{t+1}] + \\ &\quad 2(d+5) \sum_{j=1}^n L_j E[\|\mathbf{z}_j(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| | \mathcal{F}_{t+1}] + 2\sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \alpha(t+1)(d+4)^2 \sum_{j=1}^n L_j^2, \end{aligned} \quad (8)$$

这里 $\bar{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j(t)$.

证明 注意到 $\mathbf{A}(t)$ 是列随机矩阵,由(2)式中 $\mathbf{w}_i(t+1)$ 的定义可得:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i(t+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\mathbf{A}(t)]_{ij} \mathbf{x}_j(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n [\mathbf{A}(t)]_{ij} \mathbf{x}_j(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j(t).$$

又因为:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i(t+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(t+1) \mathbf{z}_i(t+1). \quad (9)$$

结合(5)式和(9)式可得:

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \frac{\alpha(t+1)}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1). \quad (10)$$

对任意 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^d$,由(10)式,对所有 $t \geq 0$,有:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{v}\|^2 = \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v}\|^2 - \frac{2\alpha(t+1)}{n} \left\langle \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1), \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v} \right\rangle + \frac{\alpha^2(t+1)}{n} \left\| \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) \right\|^2. \quad (11)$$

在(11)式中,取期望有:

$$\begin{aligned} E[\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{v}\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}] &= \\ \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v}\|^2 - \frac{2\alpha(t+1)}{n} \sum_{j=1}^n \langle E[\tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) | \mathcal{F}_{t+1}], \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v} \rangle &+ \frac{\alpha^2(t+1)}{n} E\left[\left\| \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) \right\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}\right]. \end{aligned} \quad (12)$$

由引理 1 结论 c) 可得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \langle E[\tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) | \mathcal{F}_{t+1}], \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v} \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle \nabla \tilde{f}_j(\mathbf{z}_j(t+1)), \mathbf{z}_j(t+1) - \mathbf{v} \rangle + \\ &\quad \sum_{j=1}^n \langle \nabla \tilde{f}_j(\mathbf{z}_j(t+1)), \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1) \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

再由 \tilde{f}_i 的凸性和引理 1 的结论 a) 可得:

$$\langle \nabla \tilde{f}_j(\mathbf{z}_j(t+1)), \mathbf{z}_j(t+1) - \mathbf{v} \rangle \geq \tilde{f}_j(\mathbf{z}_j(t+1)) - \tilde{f}_j(\mathbf{v}) \geq f_j(\mathbf{z}_j(t+1)) - f_j(\mathbf{v}) - \sqrt{d} \sigma_j L_j.$$

又因为:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{z}_j(t+1)) - f_j(\mathbf{v}) &= f_j(\mathbf{z}_j(t+1)) - f_j(\bar{\mathbf{x}}(t)) + (f_j(\bar{\mathbf{x}}(t)) - f_j(\mathbf{v})) \geq \\ &\quad \nabla f_j(\bar{\mathbf{x}}(t))' (\mathbf{z}_j(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)) + (f_j(\bar{\mathbf{x}}(t)) - f_j(\mathbf{v})). \end{aligned}$$

利用 f_j 的 Lipschitz 连续性,有 $\nabla f_j(\bar{\mathbf{x}}(t))' (\mathbf{z}_j(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)) \geq -L_j \|\mathbf{z}_j(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\|$. 于是有:

$$\langle \nabla \tilde{f}_j(\mathbf{z}_j(t+1)), \mathbf{z}_j(t+1) - \mathbf{v} \rangle \geq -L_j \|\mathbf{z}_j(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| + f_j(\bar{\mathbf{x}}(t)) - f_j(\mathbf{v}) - \sqrt{d} \sigma_j L_j. \quad (14)$$

由引理 1 的结论 c) 得:

$$\|\nabla \tilde{f}_j(\mathbf{z}_j(t+1))\| = \|E[(\tilde{\mathbf{g}}_j(t+1)) | \mathcal{F}_{t+1}]\| \leq E[\|(\tilde{\mathbf{g}}_j(t+1))\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}]^{\frac{1}{2}} \leq (d+4)L_j. \quad (15)$$

考虑(13)式右边的第二项,有:

$$\langle \nabla \tilde{f}_j(\mathbf{z}_j(t+1)), \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1) \rangle \geq -(d+4)L_j \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1)\|. \quad (16)$$

结合(13),(14)和(16)式,有:

$$\sum_{j=1}^n \langle E[\tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) | \mathcal{F}_{t+1}], \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v} \rangle \geq F(\bar{\mathbf{x}}(t)) - F(\mathbf{v}) - (d+5) \sum_{j=1}^n L_j \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1)\| - \sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j. \quad (17)$$

考虑(12)式右边的第三项,利用 $\left\| \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) \right\|^2 \leq n \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1)^2$ 和引理 1 的结论 c),有:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2(t+1)}{n^2} E\left[\left\| \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) \right\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}\right] &\leq \frac{\alpha^2(t+1)}{n} \sum_{j=1}^n E\left[\left\| \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{g}}_j(t+1) \right\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}\right] \leq \\ &\frac{\alpha^2(t+1)}{n} (d+4)^2 \sum_{j=1}^n L_j^2. \end{aligned} \quad (18)$$

于是由(12),(17)和(18)式,可以得到:

$$\begin{aligned} E[\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{v}\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}] &\leq \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v}\|^2 - \frac{2\alpha(t+1)}{n} F(\bar{\mathbf{x}}(t)) - F(\mathbf{v}) + \\ &\frac{2\alpha(t+1)}{n} (d+5) \sum_{j=1}^n L_j \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1)\| + \frac{2\alpha(t+1)}{n} \sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \frac{\alpha^2(t+1)}{n} (d+4)^2 \sum_{j=1}^n L_j^2. \end{aligned} \quad (19)$$

在(19)式中,令 $\mathbf{v} = \mathbf{z}^*$, 对所有的 $t \geq 0$, 有:

$$\begin{aligned} E[\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{z}^*\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}] &\leq \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 - \frac{2\alpha(t+1)}{n} F(\bar{\mathbf{x}}(t)) - F(\mathbf{z}^*) + \\ &\frac{2\alpha(t+1)}{n} (d+5) \sum_{j=1}^n L_j \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t)\| + \frac{2\alpha(t+1)}{n} \sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \frac{\alpha^2(t+1)}{n} (d+4)^2 \sum_{j=1}^n L_j^2. \end{aligned} \quad (20)$$

一方面,由假设 1 的结论 a) 知, $F(\mathbf{x})$ 是强凸函数,因此有:

$$F(\bar{\mathbf{x}}(t)) - F(\mathbf{z}^*) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2. \quad (21)$$

另一方面,由假设 1 的结论 b) 知 F 是 L -Lipschitz 连续的,有:

$$\begin{aligned} F(\bar{\mathbf{x}}(t)) - F(\mathbf{z}^*) &= F(\bar{\mathbf{x}}(t)) - F(\mathbf{z}_i(t+1)) + F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*) \geq \\ &-L \|\mathbf{z}_i(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| + F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*). \end{aligned} \quad (22)$$

(21)式与(22)式相加可得:

$$2[F(\bar{\mathbf{x}}(t)) - F(\mathbf{z}^*)] \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 - L \|\mathbf{z}_i(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| + F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*). \quad (23)$$

又由(20)式与(23)式,可得:

$$\begin{aligned} E[\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{z}^*\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}] &\leq \\ &\|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 - \frac{\alpha(t+1)}{2n} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 + \frac{\alpha(t+1)}{n} L \|\mathbf{z}_i(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| - \\ &\frac{\alpha(t+1)}{n} (F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*)) + \frac{2\alpha(t+1)}{n} (d+5) \sum_{j=1}^n L_j \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1)\| + \\ &\frac{2\alpha(t+1)}{n} \sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \frac{\alpha^2(t+1)}{n} (d+4)^2 \sum_{j=1}^n L_j^2. \end{aligned} \quad (24)$$

对(24)式两边取期望,即得定理 1 的结果。

下面将给出算法 GFD 的收敛率。

定理 2 在定理 1 的条件下,令:

$$\alpha(t) = \frac{\beta}{t}, t \geq 1, \quad (25)$$

证毕

其中常数 p 满足:

$$p \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n} \geq 4. \quad (26)$$

对所有 $\tau \geq 2$, 有 $E[F(\hat{z}_i(\tau))] - F(\mathbf{z}^*) \leq \frac{K_1 \ln \tau + K_2}{\tau} + 4\sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j$ 成立。其中:

$$\hat{z}_i(t) = \frac{\sum_{s=1}^t (s-1) \mathbf{z}_i(s)}{\frac{t(t-1)}{2}}, t \geq 2, K_1 = \frac{16npL(2d+11)(d+4) \max_j L_j}{\delta(1-\lambda)},$$

$$K_2 = \frac{16L\lambda(2d+11)}{\delta(1-\lambda)} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j(0)\|_1 + \frac{16L(2d+11)}{\delta} \frac{np(d+4) \max_j L_j}{1-\lambda} + 2p(d+4)^2 \sum_{j=1}^n L_j^2.$$

证明 将(25),(26)式代入(24)式中可得:

$$E[\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{z}^*\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}] \leq \left(1 - \frac{2}{t+1}\right) \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 - \frac{p}{n(t+1)} (F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*)) + \frac{pL}{n(t+1)} \|\mathbf{z}_i(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| + \frac{2p(d+5)}{n(t+1)} \sum_{j=1}^n L_j \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1)\| + \frac{2p\sqrt{d}}{n(t+1)} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \frac{p^2(d+4)^2}{n(t+1)^2} \sum_{j=1}^n L_j^2.$$

将以上不等式两边同时乘以 $t(t+1)$, 有:

$$t(t+1)E[\|\bar{\mathbf{x}}(t+1) - \mathbf{z}^*\|^2 | \mathcal{F}_{t+1}] \leq t(t-1) \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}^*\|^2 - \frac{pt}{n} (F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*)) + \frac{pLt}{n} \|\mathbf{z}_i(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| + \frac{2pt\sqrt{d}}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \frac{2pt(d+5)}{n} \sum_{j=1}^n L_j \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1)\| + \frac{p^2t(d+4)^2}{n(t+1)} \sum_{j=1}^n L_j^2.$$

在上式两边, 首先对 t 从 1 到 $\tau-1$ 求和, 然后两边同时取期望有:

$$\tau(\tau-1)E[\|\bar{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{z}^*\|^2] \leq -\frac{p}{n} \sum_{t=1}^{\tau-1} tE[F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*)] + \frac{pL}{n} \sum_{t=1}^{\tau-1} tE[\|\mathbf{z}_i(t+1) - \bar{\mathbf{x}}(t)\|] + \frac{2p(d+5)}{n} \sum_{t=1}^{\tau-1} t \sum_{j=1}^n L_j E[\|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{z}_j(t+1)\|] + \frac{2p\sqrt{d}}{n} \sum_{t=1}^{\tau-1} t \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \frac{p^2(d+4)^2}{n} \sum_{t=1}^{\tau-1} \frac{t}{t+1} \sum_{j=1}^n L_j^2. \quad (27)$$

由(15)式知, $E[\|\alpha(t)\tilde{\mathbf{g}}_i(t)\|_1] \leq \frac{p(d+4)L_i}{t}$, 从而满足引理 2 的条件。因此有:

$$E\left[\left\|\sum_{t=1}^{\tau-1} \left[\mathbf{z}_i(t+1) - \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j(t)}{n}\right]\right\|\right] \leq \frac{8}{\delta} \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j(0)\|_1 + \frac{8}{\delta} \frac{np(d+4) \max_j L_j}{1-\lambda} (1 + \ln(\tau-1)). \quad (28)$$

将(28)式代入(27)式中, 两边同时除以 $\tau(\tau-1)$, 有:

$$\frac{p}{n\tau(\tau-1)} \sum_{t=1}^{\tau-1} tE[F(\mathbf{z}_i(t+1)) - F(\mathbf{z}^*)] \leq \frac{pL}{n\tau} \frac{8}{\delta} \left[\frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j(0)\|_1 + \frac{np(d+4) \max_j L_j}{1-\lambda} (1 + \ln(\tau-1)) \right] + \frac{2pL(d+5)}{n\tau} \frac{8}{\delta} \left[\frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j(0)\|_1 + \frac{np(d+4) \max_j L_j}{1-\lambda} (1 + \ln(\tau-1)) \right] + \frac{2p\sqrt{d}}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j + \frac{p^2(d+4)^2}{n\tau} \sum_{j=1}^n L_j^2.$$

最后, 由 F 的凸性即可证得定理 2 的结果。

证毕

注 2 定理 2 的收敛结果分成两部分, 其中第一部分表示优化误差项, 第二部分表示光滑化误差项。定理 2

表明, 当 τ 逐渐增大时, $E[F(\hat{z}_i(\tau))]$ 逐渐收敛到 $F(\mathbf{z}^*)$, 收敛率是 $O(\ln \tau / \tau)$, 并且带有光滑化误差项 $4\sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j$ 。

特别地, 当所有的光滑化参数 σ_j 取得足够小的时候, 光滑化误差项 $4\sqrt{d} \sum_{j=1}^n \sigma_j L_j$ 也足够小, 从而 $E[F(\hat{z}_i(\tau))] - F(\mathbf{z}^*)$ 也足够小。对比文献[7]中的 push-sum 次梯度算法(简称算法 SGD), 算法 GFD 多了光滑化误差项, 收敛率略差于算法 SGD, 这是因为本文的算法 GFD 仅仅使用了函数值信息。

3 数值实验

考虑一个正则化的 LASSO 问题^[5]:

$$\min_{z \in \mathbf{R}^d} F(z) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{z} \rangle - b_i)^2 + \rho \|\mathbf{z}\|_1,$$

这里 ρ 是一个正的权参数, $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^d, b_i \in \mathbf{R}, \|\cdot\|_1$ 表示 l_1 范数。

对任意的 $i=1, 2, \dots, n$, 假设点对 (\mathbf{a}_i, b_i) 是在区间 $(0, 1)$ 上随机产生, 且服从均匀分布。取步长 $\alpha(t)$ 满足定理 2 的条件。取 $\rho=0.1$, 取光滑化参数 $\sigma_i=10^{-6}, i=1, 2, \dots, n$ 。对于时变的权矩阵, 首先随机生成 50 个满足假设 2 的矩阵; 然后每次迭代从中选取一个。考虑最大误差 $\max_{\text{error}} = \max_{i \in V} [F(\hat{\mathbf{z}}_i(\tau)) - F(\mathbf{z}^*)]$ 。将本文的算法 GFD 与算法 SGD^[7] 进行对比。

图 1 表示智能体总个数 n 为 100, 问题维数 d 分别为 1 和 3 时, 最大误差 \max_{error} 的演化图。图 2 表示智能体总个数 n 为 200, 问题维数 d 分别为 1 和 3 时, 最大误差 \max_{error} 的演化图。由于算法 GFD 仅仅使用了函数值信息, 在理论上算法 GFD 的收敛率略差于算法 SGD, 但从数值试验中可以看出, 算法 GFD 与算法 SGD 具有相似的收敛效果。另外, 对比图 1a, b 发现, 随着问题维数的增加, 算法 GFD 的收敛误差也随之增大。图 2 也展示了相似的结果。

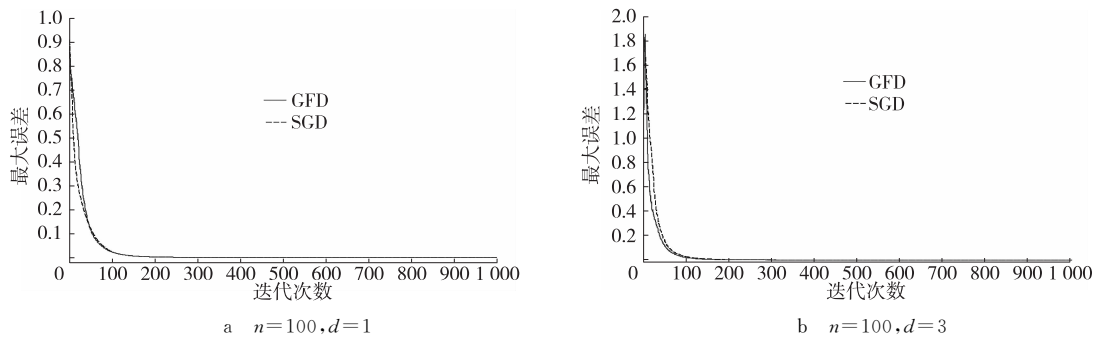


图 1 智能体总个数为 100 的最大误差对比

Fig. 1 Max error versus number of iterations with

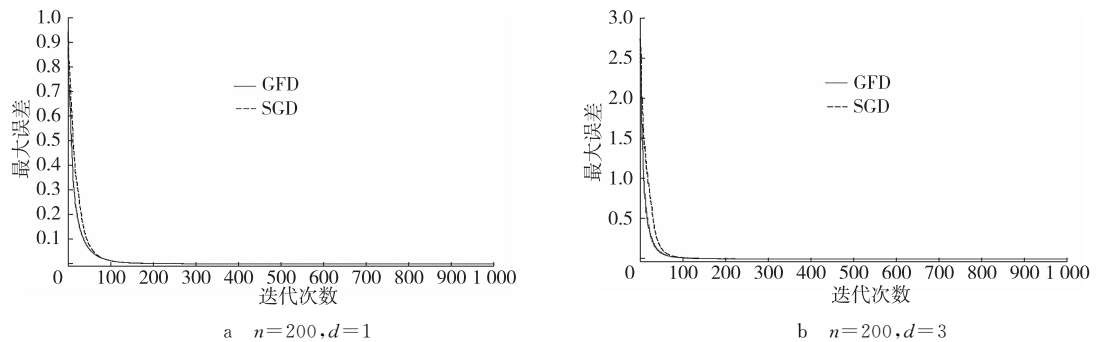


图 2 智能体总个数为 200 的最大误差对比

Fig. 2 Max error versus number of iterations with $n=200$

4 结语

针对分布式优化问题, 许多实际问题中的目标函数是不可微的, 其次梯度往往难以计算, 有时甚至不可用。基于此, 本文提出了一种分布式 gradient-free 算法, 分析了算法的收敛性, 并给出了算法的收敛率。通过数值试验, 验证了算法的可行性和有效性。与文献[7]的分布式次梯度算法相比, 本文的算法不需要计算目标函数的次梯度, 仅仅需要计算函数值。而与文献[14]的分布式 gradient-free 算法不同的是, 本文的算法适用于有向网络。

参考文献:

[1] 洪奕光, 张艳琼. 分布式优化: 算法设计和收敛性分析[J].

控制理论与应用, 2014, 31(7): 850-857.

- HONG Y G, ZHANG Y Q. Distributed optimization; algorithm design and convergence analysis[J]. Control Theory and Applications, 2014, 31(7): 850-857.
- [2] 洪奕光, 翟超. 多智能体系统动态协调与分布式控制设计[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(10): 1506-1512.
- HONG Y G, ZHAI C. Dynamic coordination and distributed control design of multi-agent systems[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(10): 1506-1512.
- [3] 李德权, 陈平. 基于概率量化的分布式无梯度优化算法研究[J]. 皖西学院报, 2015(5): 25-28.
- LI D Q, CHEN P. Study on distributed free-gradient optimization algorithm based on probabilistic quantization[J]. Journal of West Anhui University, 2015(5): 25-28.
- [4] YUAN D M, XU S Y, LU J W. Gradient-free method for distributed multi-agent optimization via push-sum algorithms[J]. Robust Nonlinear Control, 2015, 25(10): 1569-1580.
- [5] NEDIC A, OLSHEVSKY A, OZDAGLAR A, et al. On distributed averaging algorithms and quantization effects[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(11): 2506-2517.
- [6] NEDIC A, OZDAGLAR A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(1): 48-61.
- [7] NEDIC A, OLSHEVSKY A. Distributed optimization over time-varying directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 60(3): 601-615.
- [8] 唐朝君. 切换拓扑下离散时间多智能体系统的包含控制[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2017, 31(5): 143-147.
- TANG C J. Containment control of discrete-time multi-agent systems with switching topologies[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2017, 31(5): 143-147.
- [9] 龙强, 李觉友. 次梯度法在求解非光滑最优化问题时的计算效果研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(6): 25-30.
- LONG Q, LI J Y. Numerical performance of subgradient methods in solving nonsmooth optimization problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2013, 30(6): 25-30.
- [10] 龙强. 基因算法在求解非光滑优化问题中的应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(1): 12-15.
- LONG Q. The application of genetic algorithm in solving nonsmooth optimization problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2013, 30(1): 12-15.
- [11] 万轩, 赵克全. 非光滑 B-预不变凸优化问题的解集刻画[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, 29(6): 1-5.
- WAN X, ZHAO K Q. On characterizing solution sets of nonsmooth B-preinvex optimization problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2012, 29(6): 1-5.
- [12] DUCHI J C, JORDAN M I, WAINWRIGHT M J, et al. Optimal rates for zero-order convex optimization: the power of two function evaluations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(5): 2788-2806.
- [13] 赵克全, 唐莉萍. 一类非可微多目标分式规划问题的混合对偶[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2011, 28(3): 1-3.
- ZHAO K Q, TANG L P. The mixed duality of a kind of non-differentiable multi objective fractional[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2011, 28(3): 1-3.
- [14] LI J Y, WU C Z, WU Z Y. Gradient-free method for nonsmooth distributed optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2017, 13(2): 21-21.
- [15] NEDIC A, OLSHEVSKY A. Stochastic gradient-push for strongly convex functions on time-varying directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(12): 36-47.

Operations Research and Cybernetics

Gradient-Free Push-Sum Method for Strongly Convex Distributed Optimization

YU Shuhui, LI Jueyou, DU Xuewu

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] To solve the distributed convex optimization problem in multi-agent systems, a gradient-free algorithm with push-sum protocol is proposed. [Methods] Based on push-sum subgradient algorithm, the subgradient is replaced with gradient-free by using Gaussian smoothing, and prove the convergence of the proposed gradient-free push-sum algorithm. [Findings] The convergence rate of the proposed gradient-free push-sum algorithm is order of $\frac{1}{\sqrt{k}}$, where k is the number of iterations. [Conclusions] The numerical example shows that the proposed algorithm has the similar convergence as the subgradient algorithm.

Keywords: multi-agent system; distributed convex optimization; gradient-free; push-sum

带有学习与恶化效应的共同工期指派问题*

王吉波, 梁茜茜, 张 博
(沈阳航空航天大学 理学院, 沈阳 110136)

摘要:【目的】研究在共同工期指派模型下,工件的实际加工时间既有学习效应(与所排位置有关)又有恶化效应(与开工时间有关)的排序问题,其中机器限定为一台。【方法】为求得最优排序,使得工件的提前、延误和工期成本的线性加权和最小,其中权重为位置权重,工件的共同工期为决策变量,此问题可转化为经典的运筹学方法求解,即求解指派问题。【结果】这个问题在位置权重、学习与恶化效应下依然是多项式时间可解的。【结论】算法分析和实例表明给出的求解算法是非常有效的。

关键词:排序;工期指派;学习效应;恶化效应

中图分类号:O223;C934

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)03-0001-06

经典的排序模型中,通常假定工件(也称任务或作业)的加工时间为给定常数^[1-3],但在许多实际生产过程中,工件的加工时间可能与其所排位置(是所排位置的递减函数,即学习效应)和开始加工时间(是开工时间的递增函数,即恶化效应)有着某种联系。学习效应产生的背景是工件的加工时间会随着机器(比如技术工人)熟练度的提升、机器磨合度的增加等因素而使后来加工的工件实际加工时间变短,有不少学者对学习效应方面的排序问题进行了论述^[4-8]。在另一方面,工件的加工时间受开始加工时间的影响,开始加工时间越晚,加工时间越大,因此有学者对恶化效应方面的排序问题进行了研究^[9-12]。同样,在现实的企业生产(制造)过程中,工件的实际加工时间受多种因素的影响,比如同时受加工所排位置和开始开工时间的影响,由此产生具有学习效应与恶化效应的排序问题。Lee^[13]首先考虑了同时具有学习与恶化效应的单机排序问题,证明了一些正则目标函数是多项式时间可解的。此后,有许多学者对此进行了研究^[14-20]。

与此同时,准时制(Just-in-time, JIT)排序问题一直备受人们关注。在JIT系统下,工作既不能太早也不能太晚完成,从而直接影响产品的提前成本、延误成本以及送货期(工期)成本^[21-26]。虽然工件同时具有学习与恶化效应的排序问题^[13-20]和工件具有共同工期(Common due date, CON)^[21-26]的排序模型都得到广泛的研究,但二者共同被研究的情况却相对较少。Yang和Kuo^[20]考虑了工件同时具有学习与恶化效应的排序问题,在限定单机和共同工期模型下,对一个正则目标(即工件的提前、延误和共同工期成本的加权和,其中提前工件和延误工件的权重分别都相等)问题给出了一个最优求解算法。Brucker^[27]研究了具有CON的单机排序问题,其中工件的提前和延误都是和位置有关的权重(即位置权重),他证明了在位置权重下的共同工期指派问题是多项式时间可解的。本文将讨论在CON指派和位置权重模型下,在限定机器数为一台和工件加工时间同时具有学习与恶化效应的情况下,证明了这个排序问题依然多项式时间可解。

1 问题描述

本文的排序问题可描述为:给定一台机器和 n 个工件 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$,假设 n 个工件都可在零时刻进行加工,而同一时刻机器最多加工一个工件,且不允许中断。工件具有与位置有关的学习效应和开工时间相关的共同恶化率,假设排在第 r 个位置的工件 J_i 的学习效应为 b_i , α 为 n 个工件的共同恶化率,工件的开始加工时间为 t ,同Yang和Kuo^[19]一样,工件 J_i 的(实际)加工时间为 $p_i^\lambda = a_i r^{b_i} + \alpha t, i = 1, 2, \dots, n$,其中 a_i 和 $b_i \leq 0$ 分别表

* 收稿日期:2018-10-31 修回日期:2018-12-10 网络出版时间:2019-05-09 19:30

资助项目:国家自然科学基金(No. 71471120);辽宁省高等学校创新人才支持计划(No. LR2016017);辽宁省“百千万人才工程”

第一作者简介:王吉波,男,教授,博士生导师,研究方向为组合优化、生产计划与排序,E-mail:wangjibo75@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1930.022.html

示工件 J_i 的标准加工时间和学习因子, $\alpha \geq 0$ 为(共同)恶化率(产生恶化效应)。令 C_i 和 d_i 分别表示工件 J_i 的完工时间与工期, 考虑共同工期(CON)指派模型, 即 $d_i = d_{\text{opt}}$ (d_{opt} 为共同工期), $i = 1, 2, \dots, n$ 。在这种模型下, 目标是找到一个最优排序 $\pi = [\pi_{(1)}, \pi_{(2)}, \dots, \pi_{(n)}]$ ($\pi_{(i)}$ 代表在排序中的第 i 个位置加工的工件) 和最优的共同工期 d_{opt} , 使目标函数 $f(\pi, d_{\text{opt}}) = \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}}$ 最小, 即使工件的总加权绝对延误(提前)值和共同工期成本总费用最小。在这个目标函数中, $|L_{\pi(i)}| = E_{\pi(i)} + T_{\pi(i)}$ 是工件 $J_{\pi(i)}$ 的延误(提前)值, 其中 $E_{\pi(i)} = \max\{0, d_{\pi(i)} - C_{\pi(i)}\}$ 和 $T_{\pi(i)} = \max\{0, C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}\}$, ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为位置权重, ω_0 为共同工期 d_{opt} 的权重。用三参数表示法^[28] 可将研究的问题可表示为: $1 | \text{CON}, d_{\text{opt}}, p_i^A = a_i r^{b_i} + \alpha t \left| \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} \right.$ 。

Brucker^[27] 研究了工件加工时间为常数的情况, 即证明了问题 $1 | \text{CON}, d_{\text{opt}} \left| \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} \right.$ 是多项式时间可解的, 时间复杂度为 $O(n \log n)$ 。本文证明在工件引入学习和恶化效应条件下, 问题 $1 | \text{CON}, d_{\text{opt}}, p_i^A = a_i r^{b_i} + \alpha t \left| \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} \right.$ 仍然具有多项式时间算法, 只是算法的时间复杂度比较高, 为 $O(n^3)$ 。

2 主要结论

2.1 一般情况

对于 n 个工件的单机情况, 令 $p_{\pi(i)}^A$ 表示工件 $J_{\pi(i)}$ 排在第 i 个位置上的实际加工时间, $a_{\pi(i)}$, $b_{\pi(i)}$ 和 $C_{\pi(i)}$ 也可以进行类似定义, 则有:

$$\begin{aligned} p_{\pi(1)}^A &= C_{\pi(1)} = a_{\pi(1)} 1^{b_{\pi(1)}}, \\ p_{\pi(2)}^A &= \alpha a_{\pi(1)} 1^{b_{\pi(1)}} + a_{\pi(2)} 2^{b_{\pi(2)}}, C_{\pi(2)} = (1+\alpha) a_{\pi(1)} 1^{b_{\pi(1)}} + a_{\pi(2)} 2^{b_{\pi(2)}}, \\ p_{\pi(3)}^A &= \alpha(1+\alpha) a_{\pi(1)} 1^{b_{\pi(1)}} + \alpha a_{\pi(2)} 2^{b_{\pi(2)}} + a_{\pi(3)} 3^{b_{\pi(3)}}, C_{\pi(3)} = (1+\alpha)^2 a_{\pi(1)} 1^{b_{\pi(1)}} + (1+\alpha) a_{\pi(2)} 2^{b_{\pi(2)}} + a_{\pi(3)} 3^{b_{\pi(3)}}, \\ &\dots\dots \\ p_{\pi(i)}^A &= \alpha(1+\alpha)^{i-2} a_{\pi(1)} 1^{b_{\pi(1)}} + \alpha(1+\alpha)^{i-3} a_{\pi(2)} 2^{b_{\pi(2)}} + \dots + \alpha(1+\alpha) a_{\pi(i-2)} (i-2)^{b_{\pi(i-2)}} + \alpha a_{\pi(i-1)} (i-1)^{b_{\pi(i-1)}} + a_{\pi(i)} i^{b_{\pi(i)}}, \\ C_{\pi(i)} &= (1+\alpha)^{i-1} a_{\pi(1)} 1^{b_{\pi(1)}} + (1+\alpha)^{i-2} a_{\pi(2)} 2^{b_{\pi(2)}} + \dots + (1+\alpha) a_{\pi(i-1)} (i-1)^{b_{\pi(i-1)}} + a_{\pi(i)} i^{b_{\pi(i)}}. \end{aligned} \quad (1)$$

对于问题 $1 | \text{CON}, d_{\text{opt}}, p_i^A = a_i r^{b_i} + \alpha t \left| \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} \right.$, 先给出以下一些引理。

引理 1^[27] 对于 $1 | \text{CON}, d_{\text{opt}}, p_i^A = a_i r^{b_i} + \alpha t \left| \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} \right.$ 问题, 存在一个最优排序, 所有工件的就绪时间都是 0, 第一个加工的工件在零时刻开始加工, 且第一个工件到最后一个工件连续加工, 且机器中间不能有空闲时间。

为叙述方便, 假设存在一个工件 J_0 , 它的位置权重为 ω_0 , 标准加工时间为 $a_0 = 0$, J_0 总是在 $t = 0$ 时刻开始加工且 $\pi_{(0)} = 0$, 则对于给定的排序 $\pi = [\pi_{(0)}, \pi_{(1)}, \dots, \pi_{(n)}]$ ($\pi_{(0)} = 0$), 有:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} = \sum_{i=0}^n \omega_i |C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}|。$$

引理 2^[27] 给定一个排序 $\pi = [\pi_{(0)}, \pi_{(1)}, \dots, \pi_{(n)}]$, 工件的共同工期 d_{opt} 的最优值等于第 k 个加工的工件的完成时间, 即 $d_{\text{opt}} = C_{\pi(k)} = \sum_{i=0}^k p_{\pi(i)}^A$, 其中 k 是位置权重序列 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ 的中位数并满足:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \omega_j \leq \sum_{j=k}^n \omega_j \quad (2)$$

和

$$\sum_{j=0}^k \omega_j \leq \sum_{j=k+1}^n \omega_j。 \quad (3)$$

引理 3 对问题 $1 | \text{CON}, d_{\text{opt}}, p_i^A = a_i r^{b_i} + \alpha t \left| \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} \right.$, 在给定的最优排序 π 下, 目标函数值为:

例 1 考虑 7 个工件的集合 $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7\}$, 其中给定的参数为: $\alpha = 0.05, \omega_0 = 1$, 其他参数参见表 1。

解 由步骤 1 和 2, 可得 $k=4, \lambda_i$ 与 W_i 的值由表 2 给出。由步骤 3 可得工件的最优排序为 $[J_6, J_3, J_4, J_2, J_1, J_5, J_7]$, 其中指派问题的效率矩阵见表 3。则共同工期 $d_{\text{opt}} = 15 + 12 \times 2^{-0.31} + 9 \times 3^{-0.27} + 4 \times 4^{-0.25} = 34.198 0$, 目标函数最优值为 $\sum_{i=1}^n \omega_i |C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} = 449.996 5$ 。

2.2 特殊情况 $b_i = b (i=1, 2, \dots, n)$

考虑一特殊情况, 如果所有工件具有共同的学习因子, 即 $b_i = b, i=1, 2, \dots, n$ 。下面先给出一个引理。

表 1 例 1 给定的参数

Tab. 1 Parameters of example 1

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
a_i	5	4	12	9	16	15	18
b_i	-0.32	-0.25	-0.31	-0.27	-0.35	-0.2	-0.33
ω_i	5	4	2	3	6	1	8

表 2 λ_i 与 W_i 的值

Tab. 2 The values of λ_i and W_i

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
λ_i	1	6	10	12	14	8	7
W_i	4.229 7	8.790 2	12.181 2	13.505 9	14.767 5	8.350 0	7.000 0

表 3 指派问题 $W_{r,a_j} r^{b_j}$ 的值

Tab. 3 The values of $W_{r,a_j} r^{b_j}$ in assignment problem

工件	$W_{r,a_j} r^{b_j}$						
	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
J_1	21.148 5	35.207 8	42.853 0	43.334 6	44.117 1*	23.531 4	18.777 5
J_2	16.918 8	29.566 6	37.022 8	38.200 5*	39.502 5	21.340 7	17.214 1
J_3	50.756 4	85.086 5*	103.983 3	105.454 8	107.598 8	57.496 4	45.951 4
J_4	38.067 3	65.609 0	81.491 0*	83.600 7	86.065 2	46.326 4	37.253 2
J_5	67.675 2	110.346 4	132.683 7	133.021 7	134.520 2	71.359 8*	56.680 5
J_6	63.445 5*	114.784 7	146.675 3	153.533 4	160.547 8	87.528 1	71.149 1
J_7	76.134 6	125.872 6	152.585 3	153.856 6	156.285 8	83.208 8	66.296 1*

注: * 表示该解为最优解

引理 4^[29] 如果存在两个序列 $\{x_i\}, \{y_i\} i=1, 2, \dots, n$, 序列 $\{x_i\}$ 按非减顺序排列, 而序列 $\{y_i\}$ 按非增顺序排列, 则 $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ 最小。

由 $f(\pi, d_{\text{opt}}) = \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{\pi(i)}^A$ 可知:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{\pi(i)}^A = a_{\pi(1)} 1^b (\lambda_1 + \alpha \lambda_2 + \alpha(1+\alpha)\lambda_3 + \dots + \alpha(1+\alpha)^{n-2}\lambda_n) +$$

$$a_{\pi(2)} 2^b (\lambda_2 + \alpha \lambda_3 + \alpha(1+\alpha)\lambda_4 + \dots + \alpha(1+\alpha)^{n-3}\lambda_n) + \dots + a_{\pi(n)} n^b \lambda_n = \sum_{i=1}^n W_i a_{\pi(i)} i^b,$$

其中 W_i 由(6)式给出。

令 $\eta_i = W_i i^b$, 则:

$$f(\pi, d_{\text{opt}}) = \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{\pi(i)}^A = \sum_{i=1}^n \eta_i a_{\pi(i)}. \quad (11)$$

由(11)式和引理 4 可知, 问题 1 | CON, $d_{\text{opt}}, p_i^A = a_i r^{b_i} + \alpha t, b_i = b$ | $\sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}}$ 可由下面的多项式时间算法解决。

算法 2 步骤 1: 由(2), (3)式计算出中位数 k , 然后根据(6)式计算出 $\eta_i = W_i i^b$;

步骤 2:按照引理 4,最小的 η_i 与最大的 a_i 匹配,第二小的 η_i 与第二大的 a_i 匹配,依次进行下去,直到结束,从而求得最优排序;

步骤 3:计算 $d_{\text{opt}} = \sum_{j=1}^k p_{\pi(i)}^A$ 。

定理 2 由算法 2 可以求得问题 1 | CON, $d_{\text{opt}}, p_i^A = a_i r^{b_i} + at, b_i = b \left| \sum_{i=1}^n \omega_i |L_{\pi(i)}| + \omega_0 d_{\text{opt}} \right.$ 的最优解,且算法的时间复杂度为 $O(n \log n)$ 。

证明 算法 1 中步骤 1 和步骤 3 的时间复杂度分别为 $O(n)$,步骤 2 的时间复杂度为 $O(n \log n)$,因此算法 2 总的复杂度为 $O(n \log n)$ 。 证毕

3 结论

本文主要考虑了在 CON(共同工期)模型下,工件具有学习效应与恶化效应的单机排序问题。本文的目标是找到最优排序及共同工期 d_{opt} 使一个非正则目标(即提前、延迟和工期成本的线性加权和,其中权重为位置权重)达到最小。本文证明了这个问题具有多项式时间算法,且算法的时间复杂度为 $O(n^3)$ 。同时,在一种特殊情况下,证明了这个问题的时间复杂度可以降低(时间复杂度降低为 $O(n \log n)$)。在以后的研究中,对于工件的共同恶化率可以考虑一般情况下的恶化率,即每个工件的恶化率都不相同,并且考虑在这种模型下的流水作业排序问题以及具有资源分配的一些排序问题。

参考文献:

- [1] 唐恒永,赵传立. 排序引论[M]. 北京:科学出版社,2002.
TANG H Y, ZHAO C L. Introduction to scheduling[M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [2] 唐国春,张峰,罗守成,等. 现代排序论[M]. 上海:上海科学普及出版社,2003.
TANG G C, ZHANG F, LUO S C, et al. Theory of modern scheduling[M]. Shanghai: Popular Science Press of Shanghai, 2003.
- [3] 张新功,陈秋宏,王祥兵. 关于误工的两个代理单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2018, 35(4): 1-6.
ZHANG X G, CHEN Q H, WANG X B. Two-agent scheduling problem about tardiness on a single machine[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2018, 35(4): 1-6.
- [4] BISKUP D. Single-machines scheduling with learning considerations[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 115: 173-178.
- [5] BISKUP D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 188: 315-329.
- [6] 王吉波,汪佳,牛玉萍. 具有学习效应的单机可控加工时间排序问题研究[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2014, 31(5): 82-86.
WANG J B, WANG J, NIU Y P. A single machine scheduling with learning effect and controllable processing times [J]. Journal of Shenyang Aerospace University, 2014, 31(5): 82-86.
- [7] 王雪茹,白雪莲,王吉波,等. 基于截断学习效应的流水作业排序问题研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(5): 12-17.
WANG X R, BAI X L, WANG J B, et al. Flow shop scheduling problem with truncated learning effects[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(5): 12-17.
- [8] GAO F, LIU M, WANG J J, et al. No-wait two-machine permutation flow shop scheduling problem with learning effect, common due date and controllable job processing times [J]. International Journal of Production Research, 2018, 56(6): 2361-2369.
- [9] GAWIEJNOWICZ S. Time-dependent scheduling[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [10] WANG J B, WANG J J. Single-machine scheduling problems with precedence constraints and simple linear deterioration [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39: 1172-1182.
- [11] 王吉波,郭苗苗,刘桓,等. 具有依赖开工时间恶化工件的流水作业排序问题研究综述[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2016, 33(3): 1-10.
WANG J B, GUO M M, LIU H, et al. Survey on flow shop scheduling problems with start time dependent deteriorating jobs [J]. Journal of Shenyang Aerospace University, 2016, 33(3): 1-10.
- [12] 王吉波,赵伯来. 具有独立安装时间和恶化效应的单机成组排序问题研究[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2017, 34(4): 82-87.
WANG J B, ZHAO B L. Research on single-machine group scheduling with independent [J]. Journal of Shenyang Aerospace University, 2017, 34(4): 82-87.

- [13] LEE W C. A note on deteriorating jobs and learning in single-machine scheduling problems[J]. *International Journal of Business and Economics*, 2004, 3: 83-89.
- [14] WANG J B. A note on scheduling problems with learning effect and deteriorating jobs[J]. *International Journal of Systems Science*, 2006, 37: 827-833.
- [15] WANG J B. Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration[J]. *Omega*, 2007, 35: 397-402.
- [16] WANG J B, CHENG T C E. Scheduling problems with the effects of deterioration and learning[J]. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2007, 24: 245-261.
- [17] WANG X, CHENG T C E. Single-machine scheduling with deteriorating jobs and learning effects to minimize the makespan[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 178: 57-70.
- [18] CHENG T C E, WU C C, LEE W C. Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2008, 54: 972-982.
- [19] YANG D L, KUO W H. Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects[J]. *Computer & Industrial Engineering*, 2010, 58: 25-28.
- [20] YANG D L, KUO W H. A note on due-date assignment and single-machine scheduling with deteriorating jobs and learning effects[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2011, 62: 206-210.
- [21] BAKER K R, SCUDDER G D. Sequencing with earliness and tardiness penalties: a review[J]. *Operations Research*, 1990, 38(1): 22-36.
- [22] GORDON V S, PROTH J M, CHU C B. A survey of the state-of-the-art of common due date assignment and scheduling research[J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 139(1): 1-25.
- [23] YIN Y, CHENG C E, WU C C, et al. Single-machine common due-date scheduling with batch delivery costs and resource-dependent processing times[J]. *International Journal of Production Research*, 2013, 51(17): 5083-5099.
- [24] YIN Y, LIU M, CHENG C E, et al. Four single-machine scheduling problems involving due date determination decisions[J]. *Information Sciences*, 2013, 251: 164-181.
- [25] 刘丽丽, 任韩, 唐国春. 有公共交货期的单机分批排序问题[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 34(2): 1-5.
- LIU L L, REN H, TANG G C. Scheduling with a common due date on a single batch processing machine[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2017, 34(2): 1-5.
- [26] 姜昆, 耿新娜, 王吉波. 具有资源约束的工期指派排序问题[J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(19): 46-52.
- JIANG K, GENG X N, WANG J B. Due date assignment scheduling problems with resource constraints[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2018, 48(19): 46-52.
- [27] BRUCKER P. *Scheduling algorithms*[M]. Berlin: Springer, 2001.
- [28] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey[J]. *Annals of Discrete Mathematics*, 1979, 5: 287-326.
- [29] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. *Inequalities*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

Operations Research and Cybernetics

Common Due Date Assignment Problem with Learning and Deterioration Effects

WANG Jibo, LIANG Xixi, ZHANG Bo

(School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract: [Purposes] Under the common due date assignment, it studies a scheduling problem in which the actual processing time of a job is related to the learning effect (its position) and the deterioration effect (its starting time), where the machine number is limited to single machine. [Methods] To find an optimal schedule such that the weighted sum of the earliness and tardiness and the common due date costs is minimized, where the weights are the position-dependent weights and the common due date is a decision variable, the problem can be solved by using the classical operations research method, i. e., by using the assignment problem method. [Findings] It is showed that the problem remains polynomial time solvable under the position-dependent weights, learning the deterioration effect. [Conclusions] Analysis of algorithm and an example show that the optimal schedule can be obtained quickly by the corresponding algorithm.

Keywords: scheduling; due date assignment; learning effect; deterioration effect

(责任编辑 黄颖)

多目标优化问题近似解的组合标量化*

何爱华, 张晓青, 赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究多目标优化问题近似解的标量化性质。【方法】利用一类组合标量化方法、co-radiant集和改进集等建立多目标优化问题近似解的组合标量化。【结果】得到了多目标优化问题 ϵ -有效解、 (C, ϵ) -有效解、 E -有效解、 (C, ϵ) -弱有效解、 E -弱有效解的组合标量化结果。【结论】得到的标量化结果为设计多目标优化问题近似解的求解算法提供了理论基础。

关键词:多目标优化; ϵ -有效解; (C, ϵ) -弱有效解; E -弱有效解

中图分类号: O221.6

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)03-0007-04

1 预备知识

多目标优化理论与方法在许多实际领域中具有十分重要的作用。特别地,多目标优化问题的近似解及其标量化性质研究是多目标优化理论与方法的重要研究方向之一。1979年, Kutateladze^[1]首次提出了近似解概念。1984年, Loridan^[2]将近似解概念推广到向量情形。进一步, Gutiérrez等人^[3]利用co-radiant集提出了一类新的近似解概念 (C, ϵ) -弱有效解的概念,并研究了这类有效解的一些线性与非线性标量化性质。2011年, Chicco等人^[4]引入了改进集并利用改进集提出了 E -有效解的概念。此外, Gutiérrez等人^[5]利用改进集提出了 E -弱有效解概念,并研究了 E -弱有效解的标量化性质。还有一些学者得到基于改进集提出的其他近似解概念及其性质的一些成果^[6-8]。

近些年来,关于多目标优化问题近似解的标量化性质研究受到了广大学者的关注。Engau和Wiecek^[9]利用多目标优化问题中的著名的标量化方法研究了 ϵ -有效解的标量化结果。此外, Ghaznavi-Ghosoni等人^[10]建立 ϵ -强有效解、 ϵ -弱有效解和 ϵ -真有效解的一些必要条件和充分条件。Xu等人^[11]利用一类广义切比雪夫标量化模型对多目标优化近似解的标量化性质进行研究,建立了多目标优化问题 ϵ -弱有效解和 ϵ -真有效解的一些非线性标量化结果。2014年, Rastegar和Khorram^[12]利用松弛变量和剩余变量提出了一类新的组合标量化方法,建立了多目标优化问题的精确解、 ϵ -弱有效解和 ϵ -真有效解的组合标量化结果,包括 ϵ -弱(真)有效解的充分性条件和 ϵ -真有效解的必要条件等。然而,目前还没有成果利用Rastegar和Khorram提出的组合标量化方法研究多目标优化问题 ϵ -有效解的必要性条件以及 (C, ϵ) -近似解和 E -近似解的组合标量化结果。

受文献[3-4, 12]的启发,利用Rastegar和Khorram提出的组合标量化方法研究建立了 ϵ -真有效解、 (C, ϵ) -有效解、 E -有效解、 (C, ϵ) -弱有效解、 E -弱有效解的标量化结果。

令 \mathbf{R} 表示实数集全体, \mathbf{R}^p 是 p -维欧氏空间, $\mathbf{0}$ 表示 p -维零向量, \mathbf{e} 表示每个分量 $e_i = 1$ 的 p -维向量。如果 $A \subset \mathbf{R}^p$ 满足对任意的 $d \in A$ 和 $\alpha > 1, \alpha d \in A$, 则称 A 是 co-radiant 集。集合 A 的支撑函数定义为: $\delta_A(\mu) = \sup_{a \in A} (\mu, a), \mu \in \mathbf{R}^p$ 。

对任意的 $x, y \in \mathbf{R}^p$, 采用如下的序关系: $x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i \in 1, \dots, p, x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$ 且 $x \neq y, \forall i \in 1, \dots, p, x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in 1, \dots, p$ 。

考虑如下多目标优化问题:

* 收稿日期: 2018-09-09 修回日期: 2018-09-25 网络出版时间: 2019-05-09 19:29

资助项目: 国家自然科学基金重点项目 (No. 11431004); 国家自然科学基金面上项目 (No. 11671062); 重庆市基础与前沿研究计划项目 (No. CSTC2015jcyjA00027)

第一作者简介: 何爱华, 女, 研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail: mathheihua@163.com; 通信作者: 赵克全, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: kequanz@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1928.002.html>

$$\begin{aligned}
 (\text{MOP}) \quad \min f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)), \\
 g_i(x) &\leq 0, j=1, \dots, m, \\
 h_k(x) &= 0, k=1, \dots, l.
 \end{aligned}$$

其中 $f_i, g_i, h_k: \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 且对任意的 $1 \leq i \leq p$, 存在 $U_i \in \mathbf{R}$ 使得 $f_i(x) \leq U_i$, 即 $f_i(x)$ 有上界。将 (MOP) 的可行集记为 $X = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \leq 0, j=1, 2, \dots, m; h_k(x) = 0, k=1, \dots, l\}$ 。

(MOP) 的 ϵ -有效解的定义如下。

定义 1^[2] 令 $\epsilon \in \mathbf{R}_{\geq}$, $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的可行解。若不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) \leq f(\hat{x}) - \epsilon$, 称 \hat{x} 是 (MOP) 的 ϵ -有效解。

基于 co-radiant 集而提出的 (MOP) (C, ϵ) -有效解和 (C, ϵ) -弱有效解概念定义如下。

定义 2^[3] 设 $\hat{x} \in X, \epsilon > 0, C$ 是 \mathbf{R}^p 中的 co-radiant 集, 则有: 1) 称 \hat{x} 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解, 若 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-C(\epsilon)) \subset \{0\}$; 2) 称 \hat{x} 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解, 若 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-\text{int} C(\epsilon)) = \emptyset$ 。

改进集以及基于改进集而提出的 (MOP) E -有效解和 E -弱有效解概念定义如下。

定义 3^[4-5] 设 E 是 \mathbf{R}^p 中的非空集合, 则:

1) 如果 $0 \notin E$ 且 $E + \mathbf{R}_{\leq}^p = E$, 则称 E 是关于 \mathbf{R}_{\leq}^p 的改进集;

2) 令 E 是 \mathbf{R}^p 中关于 \mathbf{R}_{\leq}^p 的改进集, 若可行点 $\hat{x} \in X$ 满足 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-E) = \emptyset$, 则称 \hat{x} 是 (MOP) 的 E -有效解;

3) 令 E 是 \mathbf{R}^p 中关于 \mathbf{R}_{\leq}^p 的改进集, 如果可行点 $\hat{x} \in X$ 满足 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-\text{int} E) = \emptyset$, 则称 \hat{x} 是 (MOP) 的 E -弱有效解。

考虑如下标量化问题:

$$(\text{P}) \quad \min_{x \in X} \varphi(x),$$

其中 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 。设 $\epsilon > 0$ 且 $\bar{x} \in \mathbf{Z}$ 。若对任意的 $x \in S, \varphi(x) \geq \varphi(\bar{x}) - \epsilon$, 则 \bar{x} 称为问题 (P) 的一个 ϵ -最优解。若对任意的 $x \in S, \varphi(x) > \varphi(\bar{x}) - \epsilon$, 则称 \bar{x} 为问题 (P) 的严格 ϵ -最优解。

本文考虑下面的标量化问题:

$$\begin{aligned}
 (\text{SOP}) \quad \min & \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x) - \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i^- \right\}, \\
 \text{s. t.} \quad & f_i(x) + s_i^+ - s_i^- \leq \alpha_i, \\
 & x \in X, s_i^+, s_i^- \geq 0, 1 \leq i \leq p,
 \end{aligned}$$

其中 λ_i, μ_i 和 $\gamma_i (i=1, 2, \dots, p)$ 是非负的权重向量, $\alpha_i (i=1, 2, \dots, p)$ 是给定的上界。

2 主要结果

本节建立了 (MOP) 的 ϵ -有效解、 (C, ϵ) -有效解、 E -有效解、 (C, ϵ) -弱有效解和 E -弱有效解的组合标量化结果。

定理 1 设 $\epsilon \in \mathbf{R}_{\geq}^p$, 若 \hat{x} 是 (MOP) 的 ϵ -有效解, 则存在 $\gamma, \mu, \alpha, \hat{s}^+, \hat{s}^-$, 使得 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是 (SOP) 的 ϵ -最优解, 其中 $\epsilon = \sum_{i=1}^p \lambda_i \epsilon_i, \lambda \in \mathbf{R}_{\geq}^p$ 。

证明 因为 \hat{x} 是 (MOP) 的 ϵ -有效解, 所以不存在 \bar{x} 使得 $f(\bar{x}) \leq f(\hat{x}) - \epsilon$ 。令 $\gamma = 0, \mu = 0, \hat{s}^+ = 0, \hat{s}^- = 0, \alpha_i = f_i(\hat{x}) - \epsilon_i, \forall i \in 1, 2, \dots, p$, 从而满足 (SOP) 的可行解均满足 $f(\bar{x}) = f(\hat{x}) - \epsilon$, 则有 $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\hat{x}) - \sum_{i=1}^p \lambda_i \epsilon_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\hat{x}) - \epsilon$ 。故 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是 (SOP) 的 ϵ -最优解。证毕

定理 2 令 $\epsilon > 0, C \subset \mathbf{R}_{\leq}^p$ 是 co-radiant 集, $\beta < -\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma), 0 \leq \epsilon \leq \max\{0, \beta\}, \lambda + \gamma \geq 0, \mu \geq 0$ 。若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是 (SOP) 的 ϵ -最优解, 则 \hat{x} 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解。

证明 用反证法。若 \hat{x} 不是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解, 则 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-\text{int} C(\epsilon)) \neq \emptyset$ 。故存在 $c \in \text{int} C, \bar{x} \in X$ 使得 $f(\bar{x}) - f(\hat{x}) = -\epsilon c$ 。从而有:

$$f_i(\bar{x}) + \epsilon c_i + \hat{s}_i^+ - \hat{s}_i^- = f_i(\hat{x}) + \hat{s}_i^+ - \hat{s}_i^- \leq \alpha_i, i=1, 2, \dots, p. \quad (1)$$

令 $s_i^+ = \hat{s}_i^- + \epsilon c_i$. 由 $C \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 和 $c \in \text{int}C$ 可知, $c_i > 0, i = 1, 2, \dots, p$. 则 $s_i^+ > \hat{s}_i^+, i = 1, 2, \dots, p$. 由(1)式可得, $(\bar{x}, s^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的可行解. 此外,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- &= \sum_{i=1}^p \lambda_i (f_i(\hat{x}) - \epsilon c_i) - \sum_{i=1}^p \gamma_i (\hat{s}_i^+ + \epsilon c_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- = \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\hat{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \epsilon c_i. \end{aligned}$$

下证:

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \epsilon c_i > \epsilon. \quad (2)$$

若 $\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma) = 0$, 则 $\epsilon = 0$. 由 $\lambda + \gamma \geq 0$ 可得, 存在 j 使得 $\lambda_j + \gamma_j > 0$, 则有 $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \epsilon c_i \geq (\lambda_j + \gamma_j) \epsilon c_j > 0 = \epsilon$.

若 $\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma) < 0$, 则 $\epsilon = \beta < -\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma)$. 故 $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + \gamma_i) \epsilon c_i \geq -\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma) > \epsilon$, 即有(2)式成立.

因此, $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- < \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\hat{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \epsilon$. 这与 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)

的 ϵ -最优解矛盾, 故 \hat{x} 是 (C, ϵ) -弱有效解. 证毕

注 若 $C \not\subset \mathbf{R}_\leq^p$, 则定理 2 在 C 是凸 co-radiant 集条件下也不一定成立.

例 令 $\epsilon = 1, C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 1\}, \lambda = (1, 0), \gamma = \mu = (0, 0), X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, -2 \leq x_2 \leq 0\}, f(x) = x$. 则 C 是凸 co-radiant 集且 $C(\epsilon) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 1\}$, 但 $C \not\subset \mathbf{R}_\leq^p$. 此外 $f(X) = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 = 0, -2 \leq x_2 \leq 0\}, \lambda + \gamma = (1, 0), \epsilon = 0$. 进一步, 取 $\hat{x} = (0, 0)$. 显然, \hat{x} 是(SOP)的 ϵ -最优解, 但 \hat{x} 不是(MOP)的 (C, ϵ) -弱有效解.

推论 1 令 $E \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 是关于 \mathbf{R}_\leq^p 的改进集, $\beta < -\delta_{-E}(\lambda + \gamma), 0 \leq \epsilon \leq \max\{0, \beta\}, \lambda + \gamma \geq 0, \mu \geq 0$. 若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的 ϵ -最优解, 则 \hat{x} 是(MOP)的 E -弱有效解.

证明 由 $E \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 是关于 \mathbf{R}_\leq^p 的改进集易证 E 是 co-radiant 集. 从而利用定理 2 可得 \hat{x} 是(MOP)的 E -弱有效解. 证毕

定理 3 令 $\epsilon > 0, C \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 是 co-radiant 集, $\beta < -\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma), 0 \leq \epsilon \leq \max\{0, \beta\}, \lambda + \gamma > 0, \mu \geq 0$. 若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的 ϵ -最优解, 则 \hat{x} 是(MOP)的 (C, ϵ) -有效解.

证明 用反证法. 若 \hat{x} 不是(MOP)的 (C, ϵ) -有效解, 则 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-C(\epsilon)) \not\subset \{0\}$. 故存在 $c \in C \setminus \{0\}, \bar{x} \in X$ 使得 $f(\bar{x}) - f(\hat{x}) = -\epsilon c$. 从而有:

$$f_i(\bar{x}) + \epsilon c_i + \hat{s}_i^+ - \hat{s}_i^- = f_i(\hat{x}) + \hat{s}_i^+ - \hat{s}_i^- \leq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, p. \quad (3)$$

令 $s_i^+ = \hat{s}_i^+ + \epsilon c_i$, 由 $C \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 和 $c \neq 0$ 可知, 存在 j 使得 $c_j > 0$, 则 $s_j^+ > \hat{s}_j^+$. 由(3)式可得, $(\bar{x}, s^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的可行解.

此外, 类似定理 2 的证明方法可得 $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- < \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\hat{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \epsilon$,

这与 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是 ϵ -最优解矛盾. 故 \hat{x} 是(MOP)的 (C, ϵ) -有效解. 证毕

推论 2 令 $E \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 是关于 \mathbf{R}_\leq^p 的改进集, $\beta < -\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma), 0 \leq \epsilon \leq \max\{0, \beta\}, \lambda + \gamma > 0, \mu \geq 0$. 如果 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的 ϵ -最优解, 则 \hat{x} 是(MOP)的 E -有效解.

证明 由 $E \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 是 co-radiant 集和定理 3 可得 \hat{x} 是(MOP)的 E -有效解. 证毕

定理 4 令 $\epsilon > 0, C \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 是 co-radiant 集, $\beta < -\delta_{-C(\epsilon)}(\lambda + \gamma), 0 \leq \epsilon \leq \max\{0, \beta\}, \lambda + \gamma \geq 0, \mu \geq 0$. 若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的 ϵ -严格最优解, 则 \hat{x} 是(MOP)的 (C, ϵ) -有效解.

证明 用反证法. 若 \hat{x} 不是(MOP)的 (C, ϵ) -有效解, 则 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-C(\epsilon)) \not\subset \{0\}$. 故存在 $c \in C \setminus \{0\}, \bar{x} \in X$ 使得 $f(\bar{x}) - f(\hat{x}) = -\epsilon c$. 从而有:

$$f_i(\bar{x}) + \epsilon c_i + \hat{s}_i^+ - \hat{s}_i^- = f_i(\hat{x}) + \hat{s}_i^+ - \hat{s}_i^- \leq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, p. \quad (4)$$

令 $s_i^+ = \hat{s}_i^- + \epsilon c_i$. 由 $C \subset \mathbf{R}_\leq^p$ 和 $c \neq 0$ 可知, 存在 j 使得 $c_j > 0$, 则 $s_j^+ > \hat{s}_j^-$. 由(4)式可得, $(\bar{x}, s^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的可行解. 此外, 有:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i s_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- = \sum_{i=1}^p \lambda_i (f_i(\hat{x}) - \varepsilon_{c_i}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i (\hat{s}_i^+ + \varepsilon_{c_i}) + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\hat{x}) - \sum_{i=1}^p \gamma_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i^- - \varepsilon$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是 ε -最优解矛盾。故 \hat{x} 是(MOP)的 (C, ε) -有效解。

证毕

推论 3 令 $E \subset \mathbf{R}_{\leq}^l$ 是关于 \mathbf{R}_{\leq}^l 的改进集, $\beta < -\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda + \gamma)$, $0 \leq \varepsilon \leq \max\{0, \beta\}$, $\lambda + \gamma \geq 0$, $\mu \geq 0$ 。若 $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ 是(SOP)的 ε -严格最优解, 则 \hat{x} 是(MOP)的 E -有效解。

证明 由 $E \subset \mathbf{R}_{\leq}^l$ 是 co-radiant 集和定理 4 可得 \hat{x} 是(MOP)的 E -有效解。

证毕

参考文献:

- [1] KUTATELADZE S S. Convex ε -programming [J]. Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20(2): 391-393.
- [2] LORIDAN P. ε -solutions in vector minimization problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, 43(2): 265-276.
- [3] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. Siam Journal on Optimization, 2006, 17(3): 688-710.
- [4] CHICCO M, MIGNANEGO F, PUSILLO L, et al. Vector optimization problem via improvement sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 150(3): 516-529.
- [5] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 223(2): 304-311.
- [6] ZHAO K Q, YANG X M, PENG J W. Weak E -optimal solution in vector optimization [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(4): 1287-1302.
- [7] ZHAO K Q, YANG X M. E -Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64(4): 739-752.
- [8] XIA Y M, ZHANG W L, ZHAO K Q. Characterizations of improvement sets via quasi interior and applications in vector optimization[J]. Optimization Letters, 2016, 10(4): 769-780.
- [9] ENGAU A, WIECEK M M. Generating ε -efficient solutions in multiobjective programming[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 177(3): 1566-1579.
- [10] GHAZNAVI-GHOSONI B A, KHORRAM E, SOLEIMANI-DAMANEH M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization[J]. Optimization, 2013, 62(6): 703-720.
- [11] 徐威娜, 朱巧, 赵克全. 多目标优化近似解的一些非线性标量化性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(6): 7-10.
- [12] XU W N, ZHU Q, ZHAO K Q. Nonlinear scalarization characterizations of approximate solutions in multi-objective optimization[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(6): 7-10.
- [13] RATERGAR N, KHORRAM E. A combined scalarizing method for multi-objective programming problems [J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(1): 229-237.

Operations Research and Cybernetics

Combined Scalarizations for Approximate Solutions of Multi-Objective Optimization Problems

HE Aihua, ZHANG Xiaoqing, ZHAO Kequan

(Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The scalarization properties of approximate solutions for multi-objective optimization problems is studied here. [Methods] Co-radiant sets and improved sets are used to establish approximate solutions of multi-objective optimization problems by a kind of combined scalarization method. [Findings] The combined scalarization results of ε -effective solution, (C, ε) -efficient solutions, E -efficient solutions, (C, ε) -weakly efficient solutions and E -weakly efficient solutions of the multi-objective optimization problem are obtained. [Conclusions] These combined scalarization results provide a theoretical basis for designing approximate solutions of multi-objective optimization problems.

Keywords: multi-objective optimization; ε -efficient solutions; (C, ε) -(weakly) efficient solutions; E -(weakly) efficient solutions; combined scalarization

供应不确定下承诺定价策略与响应定价策略的对比研究*

吉清凯^{1,2}, 王冠¹

(1. 海南大学 管理学院, 海口 570228; 2. 东南大学 经济管理学院, 南京 211189)

摘要:【目的】为了提高供应不确定下零售商的定价决策的科学性,比较承诺定价与响应定价两种策略的优劣。【方法】构建随机非线性规划模型,利用最优化理论和逆向归纳求解法,刻画了两种策略下的最优定价与订购决策,并进行了数值分析。【结果】数值分析结果表明:两种策略的优劣取决于其相应的需求量之差与实际实现的供应量。【结论】在供应不确定条件下,响应定价不一定比承诺定价更优,决策者应权衡好响应定价的便利和其带来的需求减少的风险。

关键词:承诺定价;响应定价;不确定供应

中图分类号: O225; F5

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)03-0011-05

由于设备停机、计划外的维修与返工等原因,供应能力不确定在实际生产实践中常有发生^[1]。当出现供应不确定时,企业主要有两种定价策略:承诺定价策略(Committed pricing, CP)与响应定价策略(Responsive pricing, RP)。在承诺定价策略下,零售商在供应未确定前定价;在响应定价策略下,零售商在供应确定后定价。响应定价策略下定价时间被延迟,为零售商提供了灵活性,能够较好地利用定价来平衡供应与需求。但与承诺定价相比,响应定价策略意味着推迟告知消费者价格,这可能会使企业失去一些销售机会。因此,当面临不确定供应,企业采取何种定价策略以及如何确定价格与订购量成为企业界与学术界关注的焦点之一。本文将刻画这两种策略下的最优定价与订购决策。

已有不少学者针对供应不确定下的承诺定价策略进行了深入研究,如 Li 与 Zheng^[2]刻画了随机产出率与随机需求下的最优承诺定价与订货决策;Feng^[3]刻画了不确定产能下多周期库存系统的最优承诺定价-补货策略;Feng 与 Shi^[4]刻画了多源采购与不确定产能下的最优订购与承诺定价决策,等等。有关供应不确定下的响应定价策略也有许多研究,如 Tang 与 Yin^[5]证明在随机产出率下响应定价策略比承诺定价策略更优,并分析了在允许紧急订货和多源采购时响应定价策略的表现;在随机需求与随机产出的背景下,Surti 等人^[6]也证明了响应定价策略更优;Li 等人^[7]刻画了不确定供应下企业的多源采购与响应定价最优决策,说明企业在选择供应商时成本仍是首要因素,供应商的可靠性次之;Li 等人^[8]证明当不确定供应给买方企业带来的收益损失大于信誉损失时,响应定价策略与多源采购策略是互补关系,反之是替代关系;左晓露等人^[9]研究随机产出率及随机需求下的两级供应链,建立关于批发价、订购量和响应定价决策的博弈模型,描述了不确定环境对响应定价策略的影响;Wang 与 Yin^[10]研究企业如何综合利用备用供应策略和响应定价策略应对供应中断风险,等等。

在对比承诺定价策略与响应定价策略时,以往的文献均假设两种策略下的需求是一致的,由此得出响应定价策略比承诺定价策略更优的结论。本文将刻画两种策略下需求不一致时的最优决策,并证明响应定价策略不一定比承诺定价策略优越。本文在一定程度上完善了供应不确定下的定价理论研究,并为企业提供了有益的管理建议。

1 问题描述与假设

考虑一个零售商在某个销售季节内订购某种产品并自行定价销售,但产品的供应具有不确定性。具体而言,供应商具有不确定的生产能力 K ,当零售商订购 u 单位产品时,只能收到 $A(u) = \min\{u, K\}$ 件。随机变量 K

* 收稿日期:2018-07-03 修回日期:2018-08-31 网络出版时间:2019-05-09 19:29

资助项目:国家自然科学基金(No. 71701057);教育部人文社会科学青年基金(No. 17YJC630046);海南省自然科学基金(No. 718QN225)

第一作者简介:吉清凯,男,讲师,博士,研究方向为物流与供应链管理,E-mail:jortter@foxmail.com;通信作者:王冠,女,E-mail:932846238@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1929.006.html>

的累积分布函数为 $F(\cdot)$, 它的支撑集为 $(0, \infty)$ 。对于收到的 $A(u)$ 件产品, 零售商支付每单位订购成本 w 。为聚焦于供应不确定性, 假定零售商的需求 $D(p)$ 是依赖于市场价格的线性函数, $D(p) = a - bp, a, b > 0$, 并假定未被满足的需求将流失, 而剩余产品的处理成本为零。

零售商可选择使用两种定价策略: 承诺定价策略(CP 策略)和响应定价策略(RP 策略)。在 CP 策略下, 零售商需要在未观察到供应不确定性前同时决策订购量 u 与销售价格 p 。在 RP 策略下, 零售商在未观察到供应不确定性前决策订购量 u , 等到收货后(即观察到供应不确定性后)再决策销售价格 p 。但是, 这两种策略下的定价决策都在销售季前完成。零售商是风险中性的, 以其期望利润最大化为目标。

本文假设两种定价策略下的需求不一致: 在 CP 策略下, $D_c(p) = a_c - b_c p$, 在 RP 策略下, $D_r(p) = a_r - b_r p$ 。相对 RP 策略而言, 在 CP 策略下, 零售商的潜在市场规模 a_c 可能更大, 且需求弹性 b_c 可能更小。这是因为在 RP 策略下, 由于定价决策被推迟了, 导致其丧失了一定数量的潜在客户, 且客户在更短周期内决策时其对价格的敏感程度可能更大。比如在智能手机市场中, 在某一季度中新品发布(并公布售价)时间越晚, 其潜在的需求规模就越小, 消费者的价格敏感程度也越高。对于其它竞争激烈、替代品较多的行业而言也是如此。

2 承诺定价策略下的最优决策

在 CP 策略下, 零售商需要在未观察到供应不确定性前同时决策订购量 u 与销售价格 p , 利润函数为

$$\Pi_c(u, p) = E[p \min\{A(u), D_c(p)\} - wA(u)].$$

命题 1 在 CP 策略下, 给定任意价格 $p \geq w$, 相应的最优订购决策为 $u_c^*(p) = D_c(p)$ 。

证明 给定任意价格 $p \geq w$, 易知若 $u > D_c(p)$, 则 $\frac{\partial \Pi_c(u, p)}{\partial u} = -w\bar{F}(u) < 0$, 其中 $\bar{F}(u) = 1 - F(u) > 0$ 。

故给定价格 p , 最优的订购量应小于等于相应需求量, 即 $u_c^*(p) \leq D_c(p)$ 。继而零售商的问题可改写为:

$$\max_{0 \leq u \leq D_c(p), 0 \leq p} \Pi_c(u, p) = E[(p - w)A(u)].$$

当 $p \geq w$ 时, 易知 $\Pi_c(u, p)$ 是 u 的非减函数, 故必有 $u_c^*(p) = D_c(p)$ 。

证毕

命题 1 说明在 CP 策略下, 零售商的最优订购量不大于需求量。因此零售商的问题进一步变为:

$$\max_{p \geq w} \Pi_c(p) = E[(p - w) \min\{D_c(p), K\}],$$

基于此式可刻画最优订购量和最优价格(u_c^*, p_c^*)。

命题 2 零售商在 CP 策略下的最优价格决策 $p_c^* > w$ 是等式

$$\int_0^{a_c - b_c p_c^*} \bar{F}(k) dk - (p_c^* - w) \bar{F}(a_c - b_c p_c^*) b_c = 0$$

的唯一解, 而最优订购决策是 $u_c^* = a_c - b_c p_c^*$ 。

证明 对 $\Pi_c(p)$ 求导得

$$\frac{d\Pi_c(p)}{dp} = E[\min\{a_c - b_c p, K\}] - (p - w) b_c \bar{F}(a_c - b_c p) = \int_0^{a_c - b_c p} \bar{F}(k) dk - (p - w) b_c \bar{F}(a_c - b_c p),$$

和

$$\frac{d^2 \Pi_c(p)}{dp^2} = -2b_c \bar{F}(a_c - b_c p) - (p - w) b_c^2 f(a_c - b_c p).$$

容易验证对于 $p < w$ 有 $\frac{d\Pi_c(p)}{dp} > 0$, 对于 $p \geq w$ 有 $\frac{d^2 \Pi_c(p)}{dp^2} < 0$, 故存在唯一满足一阶条件的最优价格 $p_c^* > w$, 而最优订购量则为 $u_c^*(p) = D_c(p)$ 。

证毕

推论 1 在 CP 策略下, p_c^* 与 u_c^* 关于 a_c 单调上升, 关于 b_c 单调下降, 但 p_c^* 关于 w 单调上升, 而 u_c^* 关于 w 单调下降。

证明 利用隐函数求导法则可得

$$\frac{\partial p_c^*}{\partial a_c} = \frac{\bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + (p_c^* - w) f(a_c - b_c p_c^*) b_c}{2b_c \bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + b_c^2 (p_c^* - w) f(a_c - b_c p_c^*)} > 0,$$

$$\frac{\partial u_c^*}{\partial a_c} = 1 - \frac{\bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + b_c (p_c^* - w) f(a_c - b_c p_c^*)}{2 \bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + b_c (p_c^* - w) f(a_c - b_c p_c^*)} > 0$$

和

$$\frac{\partial p_c^*}{\partial b_c} = \frac{-(2p_c^* - \omega)\bar{F}(a_c - b_c p_c^*) - p_c^*(p_c^* - \omega)f(a_c - b_c p_c^*)b_c}{2b_c \bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + b_c^2(p_c^* - \omega)f(a_c - b_c p_c^*)} < 0,$$

$$\frac{\partial u_c^*}{\partial b_c} = -p_c^* + \frac{(2p_c^* - \omega)\bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + p_c^*(p_c^* - \omega)f(a_c - b_c p_c^*)b_c}{2\bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + b_c(p_c^* - \omega)f(a_c - b_c p_c^*)} < 0$$

以及

$$\frac{\partial p_c^*}{\partial \omega} = \frac{b_c \bar{F}(a_c - b_c p_c^*)}{2b_c \bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + b_c^2(p_c^* - \omega)f(a_c - b_c p_c^*)} > 0,$$

$$\frac{\partial u_c^*}{\partial \omega} = -\frac{b_c \bar{F}(a_c - b_c p_c^*)}{2\bar{F}(a_c - b_c p_c^*) + b_c(p_c^* - \omega)f(a_c - b_c p_c^*)} < 0.$$

证毕

3 响应定价策略下的最优决策

在 RP 策略下,零售商在第一阶段决策订购量,在第二阶段收到货后再决策零售价。零售商的问题为:

$$\max_{u \geq 0} \Pi_r(u) = E[\max_{p \geq 0} \{\pi(p|u)\} - \omega A(u)], \quad (1)$$

其中 $\pi(p|u) = p \min\{A(u), D_r(p)\}$ 代表第二阶段的子问题。对给定的送货量 A , 对比 A 与 $D_r(p)$ 的大小, 容易解出零售商的第二阶段的问题。

命题 3 零售商第二阶段的最优价格为:

$$p_r^* = \begin{cases} \frac{a_r}{2b_r}, & \text{若 } A \geq \frac{a_r}{2}; \\ \frac{(a_r - A)}{b_r}, & \text{若 } A < \frac{a_r}{2}. \end{cases}$$

证明 对 $\pi(p)$ 求导得

$$\pi'(p) = \begin{cases} a_r - 2b_r p, & \text{若 } p \geq \frac{(a_r - A)}{b_r}; \\ A > 0, & \text{若 } p < \frac{(a_r - A)}{b_r}. \end{cases}$$

故必有 $p_r^* \geq \frac{(a_r - A)}{b_r}$ 。而当 $p \geq \frac{(a_r - A)}{b_r}$ 时, 有 $\pi''(p) = -2b_r < 0$, 故 $\pi'(p) = 0$ 存在唯一的解 $\frac{a_r}{2b_r}$ 。因此, 若 $\frac{a_r}{2b_r} \geq \frac{(a_r - A)}{b_r}$ (或等价于 $A \geq \frac{a_r}{2}$), 则 $p_r^* = \frac{a_r}{2b_r}$, 否则 $p_r^* = \frac{(a_r - A)}{b_r}$ 。

证毕

根据(1)式和命题 3, 零售商的问题变为:

$$\max_{u \geq 0} \Pi_r(u) = \int_0^{\frac{a_r}{2}} \frac{x(a_r - x)}{b_r} f_u(x) dx + \int_{\frac{a_r}{2}}^{\infty} \frac{a_r^2}{4b_r} f_u(x) dx - \omega \int_0^u \bar{F}(k) dk,$$

其中 $f_u(x)$ 是给定 u 时随机变量 A 的概率密度函数。

命题 4 零售商第一阶段的最优订购决策是 $u_r^* = \frac{(a_r - b_r \omega)}{2}$ 。

证明 若 $u < \frac{a_r}{2}$, 则 $A(u)$ 必在区域 $[0, \frac{a_r}{2}]$ 中; 若 $u \geq \frac{a_r}{2}$, 则 $A(u)$ 可能在区域 $[0, \frac{a_r}{2}]$ 或区域 $[\frac{a_r}{2}, \infty)$ 。因此,

零售商第一阶段的问题可写为:

$$\Pi_r(u) = \begin{cases} \int_0^u \frac{k(a_r - k)}{b_r} f(k) dk + \int_u^{\infty} \frac{u(a_r - u)}{b_r} f(x) dx - \omega \int_0^u \bar{F}(k) dk, & \text{若 } u < \frac{a_r}{2}; \\ \int_0^{\frac{a_r}{2}} \frac{k(a_r - k)}{b_r} f(k) dk + \int_{\frac{a_r}{2}}^{\infty} \frac{a_r^2}{4b_r} f(x) dx - \omega \int_0^u \bar{F}(k) dk, & \text{若 } u \geq \frac{a_r}{2}. \end{cases}$$

对该式求导得

$$\Pi_r'(u) = \begin{cases} \bar{F}(u) \left(\frac{a_r - 2u}{b_r} - \omega \right), & \text{若 } u < \frac{a_r}{2}; \\ -\omega \bar{F}(u), & \text{若 } u \geq \frac{a_r}{2}. \end{cases}$$

故 $\Pi_r(u)$ 在 $[0, \frac{a_r}{2})$ 上是拟凸的, 在 $[\frac{a_r}{2}, \infty)$ 上是凸且非增的。而且, $\Pi_r'(u)$ 在 $\frac{a_r}{2}$ 处连续且 $\Pi_r'(u)|_{u=\frac{a_r}{2}} < 0$, 故最

优解为 $u_r^* = \frac{(a_r - b_r w)}{2} < \frac{a_r}{2}$ 。

证毕

根据命题 3~4 容易得知如下推论:

推论 2 在 RP 策略下, p_r^* 与 u_r^* 关于 a_r 单调上升, 关于 b_r 单调下降, 但 p_r^* 与 w 无关, 而 u_r^* 关于 w 单调下降。

根据命题 1~4, 并不能得出响应定价策略比承诺定价策略更优的结论, 采取哪种策略应根据需求的变化来决定。

4 数值实验: 两种策略的对比

基于以上结论, 此节假设不确定产能服务 Weibull(10, 5) 分布, 其它参数取值为 $a_r = 100, b_c = b_r = 1.1, w = 1$, 令 a_c 取 100, 120 和 150 共 3 个值, 对比响应定价策略与承诺定价策略下的最优利润, 可得图 1 如下。数值实验均在 Matlab 2012b 环境中执行。

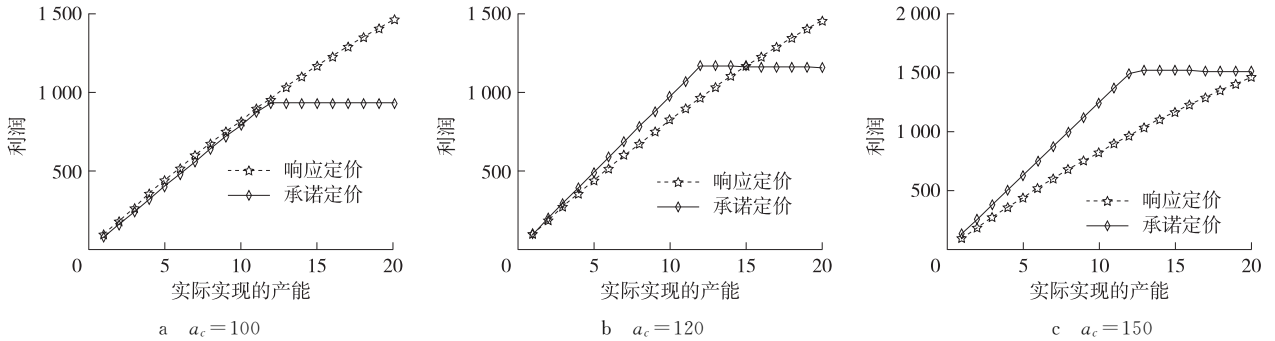


图 1 潜在需求不同时两种定价策略下的最优利润对比

Fig. 1 Comparison of optimal profits under two pricing policies with different potential demands

可见, 当 $a_c = a_r, b_c = b_r$ 时, 即 RP 策略与 CP 策略下需求一致时, 显然 RP 策略比 CP 策略更优。但当 $a_c > a_r$ 时, RP 策略不一定比 CP 策略更优。由图 1c 可见, 当 CP 策略下的潜在需求远比 RP 策略下的潜在需求大时 (即 $a_c \gg a_r$), CP 策略比 RP 策略更优。由图 1b 可见, 当 CP 策略下的潜在需求比 RP 策略下的潜在需求较大时 (即 $a_c > a_r$), 若实际实现的产能比较小, 则 CP 策略比 RP 策略更优, 若实际实现的产能比较大, 则 RP 策略响比 CP 策略更优。这是因为实际实现的产能比较大时, 零售商可以通过响应定价实现更多销量, 从而能够弥补潜在需求的损失。

类似地, 令 $a_r = a_c = 100, b_c = 1.1, w = 1$, 并令 b_r 取 1.1, 1.2 和 1.5 共 3 个值, 对比 RP 策略与 CP 策略下的最优利润, 可得图 2 如下。

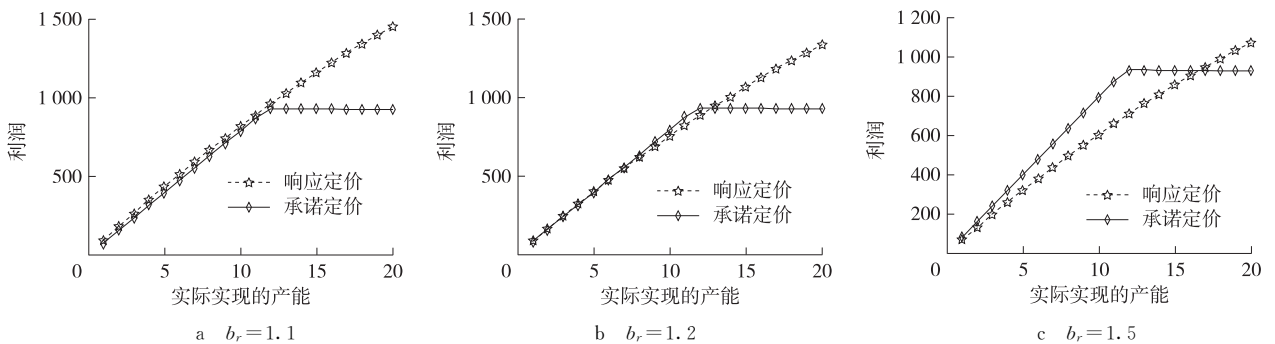


图 2 需求弹性不同时两种定价策略下的最优利润对比

Fig. 2 Comparison of optimal profits under two pricing policies with different demand elasticities

可见, 当 RP 策略下的需求弹性比 CP 策略下的需求弹性大时 (即 $b_r > b_c$) 时, RP 策略也不一定比 CP 策略更优。若实际实现的产能比较小, 则 CP 策略比 RP 策略更优, 若实际实现的产能比较大, 则 RP 策略比 CP 策略更优。这是因为实际实现的产能比较大时, 零售商可以通过响应定价实现更多销量, 从而能够弥补需求弹性较大带来的损失。

相应的管理含义可总结为:响应定价意味着延迟定价,这可能会导致流失一部分潜在需求($a_c > a_r$),同时也可能会使得消费者对价格更敏感($b_c < b_r$),因此,决策者应权衡好延迟定价的便利和需求减少的风险。采取何种策略也取决于决策者对供应不确定性的判断。若决策者对实际供应持积极态度,则其采取响应定价策略的可能性更大,反之将采取承诺定价策略。

5 结论

本文研究了不确定供应下零售商的承诺定价策略与响应定价策略,分别刻画了两种策略下的最优定价与订购决策。说明了当承诺定价策略与响应定价策略下的需求不一致时,响应定价策略不一定比承诺定价策略更优,决策者应权衡好响应定价的便利和由此带来的需求减少的风险。若决策者对实际供应持积极态度,则应采取响应定价策略,反之应采取承诺定价策略。将来的研究可以同时考虑供应与需求的不确定性,探讨此时的承诺定价及响应定价策略。

参考文献:

- [1] JI Q, WANG Y, HU X. Optimal production planning for assembly systems with uncertain capacities and random demand[J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, 253(2): 383-391.
- [2] LI Q, ZHENG S. Joint inventory replenishment and pricing control for systems with uncertain yield and demand[J]. *Operations Research*, 2006, 54(4): 696-705.
- [3] FENG Q. Integrating dynamic pricing and replenishment decisions under supply capacity uncertainty[J]. *Management Science*, 2010, 56(12): 2154-2172.
- [4] FENG Q, SHI R. Sourcing from multiple suppliers for price-dependent demands[J]. *Production and Operations Management*, 2012, 21(3): 547-563.
- [5] TANG C S, YIN R. Responsive pricing under supply uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 182(1): 239-255.
- [6] SURTI C, HASSINI E, ABAD P. Pricing and inventory decisions with uncertain supply and stochastic demand[J]. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2013, 30(6): 291-365.
- [7] LI T, SETHI S P, ZHANG J. Supply diversification with responsive pricing[J]. *Production and Operations Management*, 2013, 22(2): 447-458.
- [8] LI T, SETHI S, ZHANG J. Mitigating supply uncertainty: the interplay between diversification and pricing[J]. *Production & Operations Management*, 2016, 37(1): 116-125.
- [9] 左晓露, 刘志学, 施文. 随机产出与需求条件下的响应性定价策略研究[J]. *计算机集成制造系统*, 2014, 20(10): 2563-2571.
- [9] ZUO X L, LIU Z X, SHI W. Responsive pricing strategy under random yield and stochastic demand[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2014, 20(10): 2563-2571.
- [10] WANG Z, YIN C. Using backup supply with responsive pricing to mitigate disruption risk for a risk-averse firm[J]. *International Journal of Production Research*, 2018(2): 1-17.

Operations Research and Cybernetics

Comparison of Committed Pricing and Responsive Pricing Policies under Supply Uncertainty

JI Qingkai^{1,2}, WANG Guan¹

(1. School of Management, Hainan University, Haikou 570228;

2. School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 211189, China)

Abstract: [Purposes] To improve the scientificity of the retailer's pricing decisions under supply uncertainty, two pricing policies are compared. [Methods] By building the stochastic non-linear program, the optimal pricing and ordering decisions under two policies are characterized through optimization theory and backward induction. [Findings] Numerical analyses show that using which policy depends on the demand difference under two policies and the realized supply amount. [Conclusions] The decision-maker should balance the convenience of responsive pricing and the risk of lower demand.

Keywords: committed pricing; responsive pricing; uncertain supply

基于 CVaR 带有改进的典型交易成本的多目标投资组合模型*

宋慧慧¹, 龙宪军², 龙强³

(1. 重庆工商大学 国家智能制造服务国际科技合作基地; 2. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067;
3. 西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621010)

摘要:【目的】为了进行有效的投资,即投资者在有限的资本上通过控制风险最小并取得最大收益。【方法】利用多目标遗传算法求解。【结果】建立了一个多目标的投资组合模型,在改进后的典型交易成本基础上,实现投资组合收益最大且 CVaR 最小。【结论】选取国内股票市场的历史数据,用 Matlab R2016a 对所选数据进行实证分析,得出了一个切实可行的投资策略。

关键词:多目标投资组合;CVaR;多目标遗传算法;交易成本函数

中图分类号:O224

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)03-0016-05

随着金融市场的快速发展,对投资风险和收益的评估成为投资理论研究的关键问题之一。1952年,Markowitz^[1]提出了均值-方差模型。该模型通过计算投资模型的均值和方差来度量投资的风险和收益,但此方法存在一些不足之处^[2]:1) 损失和收益不对称;2) 可能产生无效解;3) 难以估计收益和风险的因果关系^[3]。为了改进这些缺陷,Morgan^[4]在1996年提出了风险价值(Value-at-risk, VaR),它是指在正常的市场条件下和一定置信区间内,投资者在持有资产期可能发生的最大损失。但 VaR 不能用于度量整个市场和波动市场的投资组合的风险,且 VaR 不是凸函数,不能保证最优解是全局最优解。2000年,Rockefeller 等人^[5]提出了条件风险价值(Conditional value-at-risk, CVaR),它是指在给定的置信水平下,投资资产在持有期可能下跌大于该置信水平下的 VaR 值时的平均损失,它克服了上述 VaR 的缺陷。因此, CVaR 受到许多学者的广泛关注并利用它研究投资组合模型。

李晓清等人^[6]研究了带有改进的典型交易成本函数的 MCVaR 模型,并用粒子群算法进行了例证分析;房成德等人^[7]研究了基于 CVaR 的典型交易成本的投资组合模型,并用杂草算法对模型求解分析,但是他们建立的模型都是单目标模型,不能同时满足收益最大和风险最小的要求。杨天山等人^[8]研究了基于 CVaR 的多目标投资组合模型,建立了两个目标函数的模型,并用多目标粒子群算法对模型进行检验,但该模型没有考虑交易成本对目标函数的影响。而在实际交易中,佣金、印花税等交易成本往往是不能忽视的^[9]。因此,本文考虑基于 CVaR 的带有改进的典型交易成本的多目标投资组合模型,在典型交易成本基础上的利润最大,且要求 CVaR 最小,并选择用收敛性好、鲁棒性高的多目标遗传算法求解该多目标投资组合模型,选取了国内股票市场的历史数据,用 Matlab R2016a 对所选数据进行实证分析,得出了一个切实可行的投资策略。

1 CVaR 风险度量方法

设 $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 表示一个投资组合的损失函数,其中 \mathbf{X} 为投资决策向量, \mathbf{Y} 为收益率随机变量,则 $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ 。当 \mathbf{X} 固定时, $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 是关于 \mathbf{Y} 的函数。假设 \mathbf{Y} 为连续随机变量,则 \mathbf{Y} 的概率密度函数为 $\varphi(\mathbf{Y})$, 则 $\forall \delta \in \mathbf{R}$, 分布函数为 $\psi(\mathbf{X}, \delta) = \int_{f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq \delta} \varphi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}$, 表示损失 $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 不超过 δ 的概率,它是关于 δ 的非增右连续函数。假设用 $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ 表示置信水平,则关于 \mathbf{X} 的 VaR 表示为:

* 收稿日期:2018-06-07 修回日期:2018-11-27 网络出版时间:2019-05-09 19:29

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11471059);重庆市基础与前沿研究计划(No. cstc2018jcyjAX0119);重庆高校创新团队建设计划(No. CXTDX201601026);重庆工商大学科研平台开放课题(No. KFJJ2017071);重庆市巴渝学者特聘教授专项

第一作者简介:宋慧慧,女,研究方向为金融工程, E-mail: songhuihui126@126.com;通信作者:龙宪军,男,教授,博士, E-mail: xianjunlong@ctbu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1929.018.html>

$$\text{VaR}_\beta(\mathbf{X}) = \min\{\delta \in \mathbf{R}: \phi(\mathbf{X}, \delta) \geq \beta\}.$$

由 CVaR 的定义知:

$$\text{CVaR}_\beta(\mathbf{X}) = E(f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geq \text{VaR}_\beta(\mathbf{X})) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geq \text{VaR}_\beta(\mathbf{X})} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \varphi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}. \quad (1)$$

不难发现(1)式求解过程必须要用到 VaR,并且(1)式给出的数学表达式十分复杂,难以计算出结果。因此, Rockafellar 和 Uryasev^[5]构造了辅助函数 $F_\beta(\mathbf{X}, \delta)$ 并有效地将 CVaR 和 VaR 联系起来,辅助函数为:

$$F_\beta(\mathbf{X}, \delta) = \delta + (1 - \beta)^{-1} \int_{\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n} \max[f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \delta, 0] \varphi(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}.$$

此时 $\text{VaR}_\beta(\mathbf{X}) = \min F_\beta(\mathbf{X}, \delta)$ 。由于市场的复杂性,所引起的损失也具有不确定性,且概率密度函数 $\varphi(\mathbf{Y})$ 不容易计算,故采用历史模拟方法计算,用历史数据来预测未来随机向量的分布情况。假设随机变量 \mathbf{Y} 在过去交易日的情形来代表 m 个情景,令每种情景下的取值为 $\bar{Y}_j (j=1, 2, \dots, m)$,且每种情形发生的概率均为 $\frac{1}{m}$ 。故有:

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta) = \delta + \frac{1}{m(1 - \beta)} \sum_{j=1}^m [\max(f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) - \delta, 0)]. \quad (2)$$

由于(2)式中 \max 的存在,且函数 $\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta)$ 通常不是连续可微的,这就使得一般的算法无法求解。这里利用李兴斯^[10]提出的聚合函数,将 \max 函数光滑化。对于任意的 $u > 0$,则上述函数可以表示为:

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta, u) = \delta + \frac{1}{m(1 - \beta)} \sum_{j=1}^m \left[u \ln \left(\exp \left(\frac{f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) - \delta}{u} \right) + 1 \right) \right].$$

2 基于 CVaR 含有改进典型交易成本的多目标投资组合模型

在实际的金融市场中,投资交易需要成本,若忽略了交易成本的投资组合往往会对实际收益影响很大,可能会使投资失效。2002年,王春峰等人^[2]提出了典型交易成本,并引入到投资组合中,他们认为图1中 AB 段为线性交易成本。但线性交易成本在投资成本中极少出现,所以房成德等人^[7]提出将 AB 段视为凸函数,又因为 AB 段的单位增加量不大于 B 点之后,故改进后的交易成本函数 $C(\mathbf{X}) = (c(x_1), c(x_2), \dots, c(x_n))$ 可表示为:

$$c(x_i) = \begin{cases} r \sqrt{x_i}, & 0 \leq x_i < a; \\ r(kx_i^2 + hx_i + q), & a \leq x_i < b, 0 < k < 1; \\ rx_i^3, & b \leq x_i \leq 1. \end{cases}$$

本文借鉴改进后的典型交易成本函数,建立一个收益期望最大且风险期望最小的双目标投资组合模型。设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对 n 种股票的投资比例, $\mathbf{R} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ 为期望收益率, w 表示股票的实际收益率,则基于 CVaR 风险度量的多目标投资组合模型表示为:

$$\begin{aligned} \max w(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^n r_i x_i - \sum_{i=1}^n c(x_i), \\ \min \tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta, u) &= \delta + \frac{1}{m(1 - \beta)} \sum_{j=1}^m \left[u \ln \left(\exp \left(\frac{f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) - \delta}{u} \right) + 1 \right) \right], \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases}, i = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

其中, $f(\mathbf{X}, \bar{Y}_j) = -\mathbf{X}^T \bar{Y}_j, x_i \geq 0$ 表示不允许卖空。称投资方案 \mathbf{X} 比 \mathbf{Y} 好,当且仅当 $w(\mathbf{X}) > w(\mathbf{Y})$ 且 $\tilde{F}_\beta(\mathbf{X}, \delta, u) < \tilde{F}_\beta(\mathbf{Y}, \delta, u)$ 。

3 求解算法及实证分析

3.1 求解算法设计

投资组合模型中,含有改进的典型交易成本函数,用传统的数值优化很难解决该问题。因此,本文利用一种基于生物遗传法机理的智能算法——多目标遗传算法来求解多目标投资组合模型。多目标遗传算法与单目标

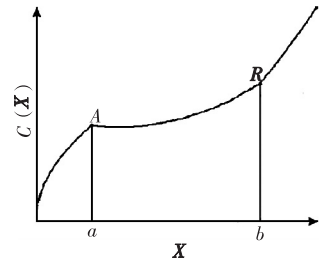


图1 改进后的典型交易成本函数
Fig. 1 Improved typical transaction cost function

遗传的差别在于:第一,要满足恰当地评价和选择 pareto 最优解,并留给下一代;第二,要满足个体集合的多样性,以保证 pareto 最优解集合的多样性;第三,满足构造生成有效的 pareto 最优解的交叉、变异等遗传操作。算法的具体步骤如下:

步骤 1:设定种群的大小 pop_size ,交叉概率 p_c ,变异概率 p_m ,最大迭代数 $\max G$,初始评价函数值 $\min E$ 。

步骤 2:生成初始解染色体(编码)。

步骤 3:根据编码求解码,即多目标优化问题的目标函数 $f_k(\mathbf{x})$ 。

步骤 4:根据各目标函数 $f_k(\mathbf{x})$,生成 pareto 最优解。

步骤 5:通过向量评价遗传算法,对各染色体进行评价和选择:

1) 将种群均匀的分成 q (目标函数的个数)个子种群,第 i 个子种群仅根据第 i 个目标函数值进行选择,生成各自的子种群;

2) 将各自生成的子种群合并到一个总的种群;

3) 对这一总的种群进行交叉和变异,并通过选择生成新的种群;

4) 若满足终止条件,则结束,否则转到 1)。

步骤 6:令 $gen = gen + 1$,并进行如下操作:

1) 交叉:a) 经交叉生成染色体的数量 cC ,令 $cC = 0$;

b) 在 $[0, 1]$ 区间生成随机数表 $r_k (k = 1, 2, \dots, pop_size)$,选择 $r_k < p_c$ 的染色体 $v_k(*)$;

c) 将选中的染色体进行配对,令 $cC = cC + 2$;

d) 随机确定交叉位置和区间,生成新的染色体分别为 $v_{cCnt-1}[*], v_{cCnt}[*]$ 。

2) 变异:a) 经变异生成的染色体数量 mC ,令 $mC = 0$;

b) 在 $[0, 1]$ 区间,随机生成数表 $r_k (k = 1, 2, \dots, pop_size)$;

c) 选择满足 $r_k < p_m$ 的染色体,并在 $[0, 10]$ 区间变异;

d) 令 $mC = mC + 1$,生成新的染色体 $v'_{cCnt+mCnt}$ 。

e) 解码新的子染色体,更新 pareto 最优解 E 。

f) 根据多目标遗传算法的向量评价遗传算法,对各染色体进行评价和选择。

步骤 7:若 $gen < \max G$,返回步骤 6;反之,因满足终止条件,输出 pareto 最优解 $E(*)$ 。

3.2 数值分析

从上证指数选取 5 支热门股票,分别为中国铝业、中国石油、工商银行、中国石化、宝钢股份。假设 2018 年 4 月 4 日买入这 5 支股票,计划 2018 年 4 月 23 日卖出共 10 个交易日。统计这 10 日 5 支股票的收盘价见表 1,然后计算出这 5 支股票在各个交易日的收益率见表 2,进而求得 5 支股票的期望收益率见表 3。

表 1 选取的 5 支股票在 10 个交易日的收盘价

Tab. 1 The closing price of the selected 5 stocks on 10 trading days

股票名称	交易日期									
	9 日	10 日	11 日	12 日	13 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
中国铝业	4.51	4.70	4.72	4.59	4.62	4.55	4.62	4.65	5.12	5.13
中国石油	7.48	7.59	7.69	7.73	7.62	7.55	7.52	7.64	7.75	7.64
工商银行	5.86	6.12	6.24	6.08	6.03	5.82	5.79	5.88	5.92	5.92
中国石化	6.59	6.77	6.89	6.94	6.83	6.71	6.62	6.85	6.90	6.83
宝钢股份	8.56	8.88	8.78	8.72	8.75	8.50	8.45	8.74	9.12	9.09

表 2 选取的 5 支股票在 10 个交易日的收益率

Tab. 2 The rate of return of return of the selected 5 stocks on 10 trading days

股票名称	交易日期										%
	9 日	10 日	11 日	12 日	13 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日	
中国铝业	18.06	6.09	6.55	3.61	4.29	2.71	4.29	4.97	15.58	15.80	
中国石油	0.27	1.74	3.08	3.62	2.14	1.21	0.80	2.41	3.89	2.41	
工商银行	-0.17	4.26	6.30	3.58	2.73	-0.85	-1.36	0.17	0.85	0.85	
中国石化	2.49	5.29	7.15	7.93	6.22	4.35	2.95	6.53	7.31	6.22	
宝钢股份	4.01	7.90	6.68	5.95	6.32	3.28	2.67	6.20	10.81	10.45	

表 3 选取的 5 支股票的期望收益率

Tab. 3 The average rate of return of the selected 5 stocks

	中国铝业	中国石油	工商银行	中国石化	宝钢股份
期望收益率	0.065 688 488	0.021 581 769	0.016 354 344	0.056 454 121	0.064 277 035

此时 $n=5, m=10, a=0.2, b=0.8, \beta=0.95, pop_size=200, p_m=0.01, \max G=60$, 则计算出的 5 支股票的最优投资比例及所对应的投资组合的收益和风险见表 4。选取迭代过程中解的变化, 即投资组合的比例与收益和 risk 的关系见表 5。同时绘制了迭代过程中收益与 risk 的相关关系图, 如图 2。

表 4 选取的 5 支股票的投资比例及收益和 risk

Tab. 4 The investment proportion of 5 stocks and their return and risk

	中国铝业	中国石油	工商银行	中国石化	宝钢股份	投资风险	投资收益
投资比例	0.784	0	0	0	0.216	0.7	0.065

表 5 投资组合的比例与收益和 risk 的关系

Tab. 5 The relationship between portfolio ratio and return and risk

中国铝业	中国石油	工商银行	中国石化	宝钢股份	投资风险	投资收益
0.784 0	0	0	0	0.216 0	0.700 0	0.065 0
0.224 0	0	0	0.425 0	0.732 5	0.480 0	0.063 4
0.204 3	0	0	0.237 6	0.558 1	0.440 0	0.062 5
0	0.305 0	0	0.459 0	0.237 0	0.156 0	0.047 4
0	0.039 8	0	0.259 1	0.214 8	0.082 5	0.039 5

从表 4 可以看出, 投资比例主要集中在收益率较高的中国铝业和宝钢股份上, 此时的实际收益率较高, risk 也较高, 符合“高收益高风险”。且从表 5 可以看出, 如果将投资比例分在其他期望收益率较低的股票上时, 实际收益率就会降低, risk 也会降低, 且从图 2 可以看出, 收益和 risk 成正相关关系, 显然该模型是合理有效的。

4 总结

本文运用 CVaR 作为计算 risk 的方法, 并在收益函数中考虑了改进后的典型交易成本函数, 建立了含有两个目标函数的投资组合模型, 结合历史数据, 利用多目标遗传算法求解该问题, 并用 Matlab R2016a 对该组合模型进行数值验证, 得到了一个切实可行的投资策略。在现有的条件下, 求解结果符合投资的一般规律, 即追求利益最大同时尽量减少 risk。当存在高风险的资产时, 作为一个不偏好 risk 的理性人, 自然会减少对该资产的投资比例, 如果过于追求收益最大化, 必然会承担较大的 risk。

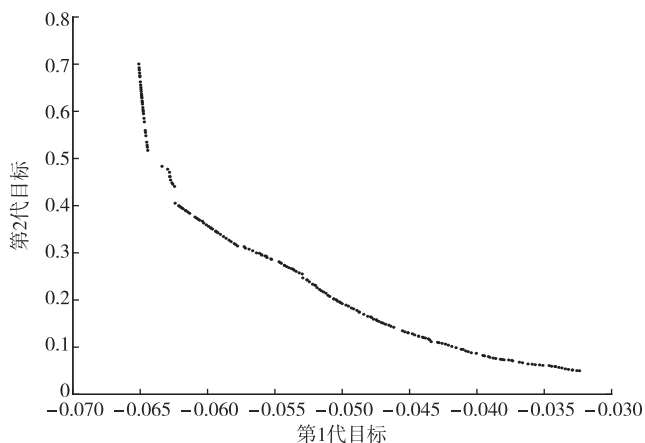


图 2 收益与 risk 的相关关系

Fig. 2 Correlation between income and risk

参考文献:

[1] MARKOWITZ H M. Portfolioc selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
 [2] 王春峰, 杨建林, 赵欣. 具有典型交易成本的投资组合管理模型及其求解[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(10): 134-138.
 WANG C F, YANG J L, ZHAO X. Portfolio management

model with typical transaction cost and its solution[J]. System Engineering Theory and Practice, 2002, 22(10): 134-138.
 [3] ARTZNER P, DELBAEN F, EBER J M, et al. Thinking coherently[J]. Risk, 1997, 10(11): 68-71.
 [4] JORION P. Value at risk: the benchmark for controlling

market risk[M]. Chicago: Irwin Professional Publishing, 2000.

[5] ROCKAFELLAR T, URYASEV S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. *Journal of Risk*, 2000, 2(3): 21-41.

[6] 李晓清, 宋江泽, 韦增欣. 带有改进的典型交易成本函数的 MCVaR 模型及其例证分析[J]. *数学的实践与认识*, 2014, 44(13): 103-114.

LI X Q, SONG J Z, WEI Z X. MCVaR model with improved typical transaction cost function and its example analysis[J]. *Journal of Mathematics in Practice and Theory*, 2014, 44(13): 103-114.

[7] 房成德, 韦增欣, 张梦颖. 基于 CVaR 的典型交易成本的投资组合模型[J]. *广西大学学报(自然科学版)*, 2015, 40(6): 1611-1616.

FANG C D, WEI Z X, ZHANG M Y. Portfolio model of typical transaction cost based on CVaR [J]. *Journal of*

Guangxi University(Natural Science), 2015, 40(6): 1611-1616.

[8] 杨天山, 韦增欣, 雷震, 等. 基于 CVaR 的多目标投资组合模型[J]. *数学的实践与认识*, 2015, 45(2): 82-88.

YANG T S, WEI Z X, LEI Z, et al. Multi objective portfolio model based on CVaR[J]. *Journal of Mathematics in Practice and Theory*, 2015, 45(2): 82-88.

[9] 李阿娜, 孙华东, 景永强. 基于交易费用的信息控制投资组合模型[J]. *重庆理工大学学报(自然科学)*, 2017, 31(4): 163-168.

LI A N, SUN D H, JIN Y Q. Model of portfolio optimization based on information control and transaction cost[J]. *Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)*, 2017, 31(4): 163-168.

[10] LI X S. An aggregate function method for monliner programming[J]. *Science in China(A)*, 1991, 34: 1467-1473.

Operations Research and Cybernetics

A Multi-Objective Portfolio Model with Improved Transaction Cost Based on CVaR

SONG Huihui¹, LONG Xianjun², LONG Qiang³

(1. National Intelligent Manufacturing Service Site, Chongqing Technology and Business University;

2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067;

3. Scholl of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010, China)

Abstract: [Purposes] Effective portfolios are the greatest gains that investors can achieve in controlling and minimizing risk. [Methods] The multi-objective genetic algorithm is used to solve the multi-objective investment portfolio model. [Findings] A multi-objective portfolio model is established which requires the minimum CVaR and the maximum profit on the basis of the typical transaction cost. [Conclusions] By using the multi-objective genetic algorithm, a practical investment strategy is obtained by analyzing the historical data of the China's stock market by Matlab 2016a.

Keywords: multi-objective portfolio; CVaR; multi-objective genetic algorithm; transaction cost function

(责任编辑 黄 颖)

改进灰狼优化算法医疗锂电池剩余寿命预测*

何成¹, 刘长春², 武洋², 吴涛², 陈童³

(1. 上海第二工业大学 智能制造与控制工程学院;
2. 上海第二工业大学 环境与材料工程学院, 上海 201209; 3. 上海市第一人民医院, 上海 200080)

摘要:【目的】通过改进灰狼优化算法对医疗锂电池进行剩余寿命预测,从而保障抢救时机并减少医疗事故的目的。【方法】运用小波核极限学习机(Wavelet kernel extreme learning machine, WKELM)与小生境灰狼算法(Niche grey wolf optimization, NGWO)相融合的算法形成改进灰狼优化算法 WKELM-NGWO 算法。采用 NGWO 算法对 WKELM 参数进行优化处理,并将最大化训练集的分类准确度作为目标函数,得到寻优过程的数学模型。采用差分方式对医疗电子设备锂电池容量的时间序列进行处理,得到多维时间序列特征向量,归一化处理获得特征向量,并将其分为训练集和测试集。计算得出每只灰狼个体的适应度值 f_i ,并对适应度值 f_i 进行排序,适应度值 f_i 排在前三的个体位置分别记为 $X_\alpha, X_\beta, X_\delta$ 。选择最优的灰狼个体位置作为 WKELM 参数对数据进行训练后,对心脏起搏器用锂电池和心脏除颤仪用锂电池两种锂电池测试样本进行剩余寿命预测操作。【结果】在相同的预测起始点下, WKELM-NGWO 算法的均方根误差(RMSE)误差低于 WKELM 和 NGWO 算法,基于融合算法 WKELM-NGWO 的医疗电子设备锂电池剩余寿命(Remaining useful life)预测曲线更接近电池的退化曲线。【结论】WKELM-NGWO 融合算法增强了对不同数据的适应能力,既克服了小波核极限学习机(WKELM)学习速度慢、结构不稳定的问题,也克服了小生境灰狼算法(NGWO)求解精度低、收敛速度慢从而导致跳不出局部最优解的问题。

关键词: 医疗锂电池; 剩余寿命预测; 小波核极限学习机; 小生境灰狼算法; 改进灰狼优化算法 WKELM-NGWO

中图分类号: TP206+.3

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)03-0021-08

1 研究背景

锂离子电池正广泛应用于医疗系统,然而一个不可避免的问题是随着循环使用和材质老化电池性能会不断下降直到废弃。另外电池性能的退化无法直接测量,往往需要提前对其进行估计,从而决定是否更换医疗设备中的锂电池,以避免一些不必要的医疗事故。因此,对于医疗设备锂电池而言,准确的剩余寿命预测可以有效的评估医疗设备锂电池的健康状态,保障医疗电子设备的可靠性和安全性^[1]。

文献[2-3]灰狼优化算法(Grey wolf optimizer, GWO)是一种模拟灰狼捕食行为的群体智能算法,该算法最先由澳大利亚学者 Mirjalili 于 2014 年提出,根据灰狼的社会等级将包围、追捕、攻击等捕食任务分配给不同等级的灰狼群来完成捕食行为,从而实现全局优化的过程。GWO 算法具有操作简单、调节参数少、编程易实现等特点。在函数优化方面,与其他群智能优化算法相比有明显的优越性。但同时也存在着易陷入局部最优、求解精度不高、收敛速度慢等缺点。根据算法存在的缺点,本文提出了一种小生境灰狼优化算法(Niche grey wolf optimization, NGWO)。该算法利用基本 GWO 算法计算各灰狼的适应度值,当灰狼间的距离小于小生境半径时,比较灰狼个体的适应度值,通过对适应度值较差的灰狼个体施以罚函数,来提高全局搜索能力。通过对 5 个基准函数的测试,将结果与基本 GWO 算法和 PSO 算法进行比较,表明了该算法的优越性。

文献[4-5]将高斯核函数引入极限学习机中,提高了 ELM 的分类精度,但是高斯核函数的性能会受到参数的影响。文献[6-8]采用冯诺依曼结构改进的鲸鱼算法(Von neumann whale optimization algorithm, VN-

* 收稿日期:2018-10-19 修回日期:2019-04-23 网络出版时间:2019-05-09 19:29

资助项目:上海第二工业大学研究生项目基金(No. EGD18YJ0003)

第一作者简介:何成,男,副教授,研究方向为故障预测与健康管管理, E-mail: hecheng@sspu.edu.cn; 通信作者:陈童,男,经济师, E-mail: 651979759@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1929.004.html>

WOA)优化 WKELM 的参数,在一定程度上降低了 WKELM 对参数的依赖性,但存在收敛速度慢、分类精度不高的问题。小波核极限学习机在算法执行过程中,不需要调整隐藏层的参数^[9-10]。因此,ELM 的学习速度更快,泛化性能更优。

2 WKELM-NGWO 预测原理

2.1 医疗锂电池剩余寿命预测的概念

医疗锂电池剩余寿命预测即根据医疗电子设备锂电池的运行状态,如果医疗电子设备锂电池系统由当前时刻 t_1 到重新充满电状态下锂电池系统性能特征低于容量阈值时刻 t_2 即额定容量的 70% 时,即认为医疗电子设备锂电池报废失效,这段 t_1 到 t_2 称为医疗锂电池剩余寿命^[11]。在时刻 t_i 内,医疗电子设备锂电池的剩余寿命可以定义用维纳过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 通过阈值 ω 的首达时间进行描述:

$$X_{t_i} = \inf\{x_{t_i} : Y(t_i + x_{t_i}) \geq \omega | Y(t_i) < \omega\}。 \quad (1)$$

2.2 小生境灰狼优化算法原理

把小生境这种生物学概念的思想提炼出来,运用到灰狼算法的优化上来,其核心要点是:当两个个体的海明距离小于预先指定的某个值时,惩罚其中适应值较小的个体。个体间的欧式距离能反映出个体间的疏散程度,对于 D 维空间灰狼 i 的位置为 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})^T$, 灰狼 j 的位置为 $X_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jD})^T$, 那么灰狼 i 与灰狼 j 之间的欧式距离为^[12]:

$$d_{ij} = \|X_i - X_j\|, i, j = 1, 2, \dots, N。 \quad (2)$$

给出指定参数(σ_{share} 为小生境半径),如果 $d_{ij} < \sigma_{\text{share}}$, 则该个体加入到小生境群体 X_p 。

小生境灰狼优化算法步骤如下:

步骤 1, 初始化 N, D, t, P 等参数以及灰狼群体 $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$, 每个灰狼的位置 $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iD})^T, (i=1, 2, \dots, N)$ 。

步骤 2, 计算每个灰狼个体的适应度值 f_i , 将排列前三的 f_i 值的灰狼个体的位置分别记为 $X_\alpha, X_\beta, X_\delta$, 并将适应度值最好即 f_i 值最大的 X_α 记为最优解。

步骤 3, 按照(3)式计算剩余个体 ω 与 $X_\alpha, X_\beta, X_\delta$ 的距离:

$$\begin{cases} D_\alpha = |C_1 X_\alpha(t) - X(t)| \\ D_\beta = |C_2 X_\beta(t) - X(t)|, \\ D_\delta = |C_3 X_\delta(t) - X(t)| \end{cases} \quad (3)$$

并根据(4)式和(5)式更新灰狼 α, β, δ 和猎物的位置:

$$\begin{cases} X_1 = X_\alpha(t) - A_1 D_\alpha \\ X_2 = X_\beta(t) - A_2 D_\beta, \\ X_3 = X_\delta(t) - A_3 D_\delta \end{cases} \quad (4)$$

$$X_p(t+1) = \frac{(X_1 + X_2 + X_3)}{3}。 \quad (5)$$

步骤 4, 小生境原理:根据(2)式计算灰狼个体间的距离 d_{ij} , 当 $d_{ij} < \sigma_{\text{share}}$ 时, 比较灰狼 i 与灰狼 j 的适应度值 f_i, f_j 的大小, 并对其中适应度值较小的灰狼施以罚函数。即若 $d_{ij} < \sigma_{\text{share}}$, 则 $\min(f_i, f_j) = Q$ (Q 函数的惩罚力度由所求函数解值的大小决定)。

步骤 5, 按照(6)式和(7)式更新参数 a, A, C 的值:

$$A = 2a \cdot r_1 - a, \quad (6)$$

$$C = 2 \cdot r_2, \quad (7)$$

其中: a 随着迭代次数的增加从 2 到 0 呈线性递减, r_1, r_2 为 $[0, 1]$ 间的随机数。

步骤 6, 若算法达到最大迭代次数 t , 那么算法结束并输出最优解 X_α ; 否则, 返回步骤 2。

2.3 小波核极限学习机

极限学习机在算法执行过程中,不需要调整隐藏层的参数,因此,ELM 的学习速度更快,泛化性能更优^[13]。

ELM 的目标为最小化输出权值及误差。根据 KKT 条件,引入 Lagrange 函数后的目标函数为:

$$\min L_{\text{ELM}} = \frac{1}{2} \|\beta\|^2 + C \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 - \sum_{i=1}^N \alpha_i (h(x_i)\beta - t_i + \gamma_i)。 \quad (8)$$

其中: β 为输出权值, x_i 为训练样本, t_i 为目标输出值, $h(x_i)$ 为隐藏层的核映射, C 为正则化系数, r_i 为训练误差, α_i 为 Lagrange 算子。

ELM 输出函数可以表示为:

$$f(x) = h(x)\beta = h(x)\mathbf{H}^T \left(\frac{1}{C} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1} \mathbf{T}。 \quad (9)$$

其中: \mathbf{I} 为单位矩阵, \mathbf{H} 为隐层输出矩阵, \mathbf{T} 为输出层矩阵。

为了进一步提高 ELM 的分类能力,将核函数引入 ELM。根据核函数的相关理论,隐层节点数可以通过核函数的形式确定,不需要人为设定。核函数矩阵具体表达式为:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T(i, j) = h(x_i) \times h(x_j) = K(x_i, x_j)。 \quad (10)$$

其中: $K(x_i, x_j)$ 为核函数, $i, j \in (1, 2, \dots, N)$ 。

因此,核极限学习机的输出函数可以表示为:

$$f(x) = h(x)\mathbf{H}^T \left(\frac{1}{C} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} K(x, x_1) \\ \dots \\ K(x, x_N) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{C} + \Omega \right)^{-1} \mathbf{T}。 \quad (11)$$

小波核函数可以实现逼近任意函数,在非线性分类平面上效果较好,泛化能力强。因此,本文选用 Morlet 小波函数作为 ELM 的核函数,小波核函数的具体数学表达式为:

$$K(x, x') = \cos \left[a \frac{\|x_i - x'_i\|}{b} \right] \exp \left[- \frac{\|x_i - x'_i\|^2}{c} \right]。 \quad (12)$$

其中: a 为系数因子, b 为尺度因子, c 为平移因子。

3 WKELM-NGWO 剩余寿命预测算法

3.1 WKELM 参数选择

极限学习机中的正则化系数 C 及小波核函数中的参数会影响 WKELM 的分类效果。若是随机选择参数,会降低 WKELM 的分类精度。因此在医疗电子设备锂电池剩余寿命预测过程中, WKELM 最优参数组合的选择极其关键。本文采用 NGWO 算法对 WKELM 参数进行优化处理,并将最大化训练集的分类准确度作为目标函数,寻优过程的数学模型为:

$$\begin{cases} \max f = \text{accuracy}(C, a, b, c) \\ \text{s. t. } C, a, b, c \in (l_{C, a, b, c}, u_{C, a, b, c}) \end{cases} \quad (13)$$

3.2 灰狼优化算法的改进

医疗电子设备锂电池容量是一组由充放电实验采集数据并分析得到的时间序列数据。医疗电子设备锂电池容量具有明显的非线性特征。采用 NGWO 算法对 WKELM 的参数优化过程如下:

步骤 1,采用差分方式对医疗电子设备锂电池容量的时间序列进行处理,得到多维时间序列特征向量,归一化处理获得特征向量,并将其分为训练集和测试集。

步骤 2,初始化 WKELM 参数 $[C, a, b, c]$ 的取值范围,设置 WKELM-NGWO 算法中的相关参数。

步骤 3,计算得出每只灰狼个体的适应度值 f_i ,并对适应度值 f_i 进行排序,适应度值 f_i 排在前三的个体位置分别记为 $X_\alpha, X_\beta, X_\delta$ 。

步骤 4,根据(3)式,(4)式和(5)式更新其他个体的位置。

步骤 5,判断当前是否达到最大迭代次数,未达到,继续重复执行步骤 3 到步骤 5;否则,跳出算法循环,并输出最佳适应度值及最优灰狼个体位置。

步骤 6,选择最优的灰狼个体位置作为 WKELM 参数对数据进行训练后,对测试样本进行剩余寿命预测操作。

3.3 WKELM-NGWO 算法性能评估

为验证 WKELM-NGWO 算法的优越性,本文采用 WKELM, NGWO 和 WKELM-NGWO 这 3 种算法对测

试函数进行仿真实验。实验中选取了 Sphere 和 Griewank 两种典型测试函数,其中 Sphere 为测试算法的收敛速度的单峰函数,Griewank 为验证算法跳出局部最优能力的多峰函数。仿真实验参数设置如下:种群个体数为 50,最大迭代次数为 600,种群规模为 50。对 3 种算法分别运行 10 次后,得到的测试函数结果对比如表 1 所示。

表 1 测试函数优化值比较

Tab. 1 Test Function Optimization Value Comparison

函数名	优化值分类	WKELM	NGWO	WKELM-NGWO
Sphere 函数	最优值	$2.034e^{-29}$	$5.315e^{-156}$	$2.012e^{-218}$
Sphere 函数	平均值	$7.817e^{-28}$	$1.342e^{-128}$	$1.186e^{-204}$
Sphere 函数	标准差	$1.083e^{-27}$	$1.465e^{-130}$	$1.532e^{-200}$
Griewank 函数	最优值	0	0	0
Griewank 函数	平均值	0	$5.5e^{-3}$	0
Griewank 函数	标准差	0	$1.22e^{-3}$	0

从表 1 中可以看出,与其他两种算法相比,WKELM-NGWO 算法综合了 NGWO 算法的收敛速度快以及 WKELM 算法跳出局部最优能力强的特点,因而用于医疗电子设备锂电池剩余寿命预测的 WKELM-NGWO 算法的优化效果更佳,稳定性更强。

4 仿真实验分析

为定量评估各算法的医疗电子设备锂电池剩余寿命预测精度,可以用 RUL 预测的绝对误差(Δ_{RUL_ae})和相对误差($\delta_{RUL_re(\%)}$)进行分析。

$$\Delta_{RUL_ae} = |L_{EOP} - L_{EOL}|, \quad (14)$$

$$\delta_{RUL_re(\%)} = \frac{|L_{EOP} - L_{EOL}|}{L_{EOL}} \times 100\%。 \quad (15)$$

(14)式和(15)式中: L_{EOL} (End of life, EOL)表示医疗电子设备中锂电池寿命真实的结束点对应的值, L_{EOP} (End of prediction, EOP)表示医疗电子设备中锂电池寿命进行算法预测的结束点对应的值, $C_{real}(i)$ 为从预测起始点开始 i 时刻后医疗电子设备锂电池的真实容量值, $C_{pre}(i)$ 为从预测起始点开始 i 时刻医疗电子设备锂电池的预测容量值。为了保证实验结果更加真实可靠,选择两组医疗电子设备锂电池 B1,B2 进行 3 种算法的剩余寿命预测(B1 为额定容量 1.44 Ah 的心脏起搏器用锂电池,B2 为额定容量 1.82 Ah 的心脏除颤仪用锂电池,电池数据来源自上海市第一人民医院设备保全处)。

4.1 基于 3 种算法的 B1 电池 RUL 预测

由表 2 数据以及图 1~图 3 可以得出:对于心脏起搏器用的锂电池,在相同预测的起始点的情况下,融合算法 WKELM-NGWO 的医疗锂电池寿命预测更加接近真实结束寿命 100 次,同时融合算法 WKELM-NGWO 的医疗锂电池剩余寿命预测结果的相对误差和绝对误差均明显低于 WKELM 算法和 NGWO 算法单独作用时的医疗锂电池剩余寿命预测结果的相对误差和绝对误差。因此,对于心脏起搏器用的锂电池而言,融合算法 WKELM-NGWO 的医疗锂电池剩余寿命预测精度明显优于 WKELM 算法和 NGWO 算法单独作用时的预测精度,且随着预测的起始点的后推,预测结果更加接近真实值。

4.2 基于 3 种算法的 B2 电池 RUL 预测

由表 3 数据以及图 4~图 6 可以得出:对于心脏除颤仪用的锂电池,在相同预测的起始点的情况下,融合算法 WKELM-NGWO 的医疗锂电池寿命预测更加接近真实结束寿命 129 次,同时融合算法 WKELM-NGWO 的医疗锂电池剩余寿命预测结果的相对误差和绝对误差均明显低于 WKELM 算法和 NGWO 算法单独作用时的医疗锂电池剩余寿命预测结果的相对误差和绝对误差。因此,对于心脏除颤仪用的锂电池而言,融合算法

WKELM-NGWO 的医疗锂电池剩余寿命预测精度明显优于 WKELM 算法和 NGWO 算法单独作用时的预测精度,且随着预测的起始点的后推,预测结果更加接近真实值。

表 2 B1 心脏起搏器用锂电池在不同算法下的 RUL 预测结果

Tab. 2 RUL prediction results of B1 cardiac pacemaker Lithium battery under different algorithms

预测的起始点	预测算法	L_{EOL}	L_{EOP}	$\Delta_{RUL_{ae}}$	$\delta_{RUL_{re}}(\%)$
前期 $T_1=40$	WKELM	100	63	37	37
前期 $T_1=40$	NGWO	100	71	29	29
前期 $T_1=40$	WKELM-NGWO	100	90	10	10
中期 $T_2=60$	WKELM	100	76	24	24
中期 $T_2=60$	NGWO	100	88	12	12
中期 $T_2=60$	WKELM-NGWO	100	96	4	4
后期 $T_3=80$	WKELM	100	92	8	8
后期 $T_3=80$	NGWO	100	97	3	3
后期 $T_3=80$	WKELM-NGWO	100	103	3	3

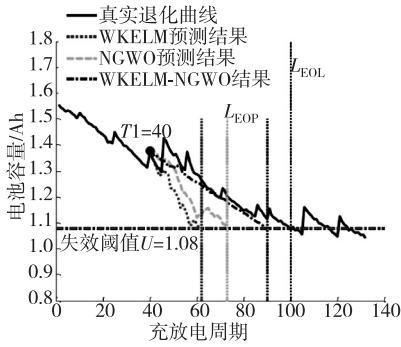


图 1 B1 电池以 $T_1=40$ 为起始点的预测曲线图

Fig. 1 Predicted graph of B1 battery starting from $T_1=40$

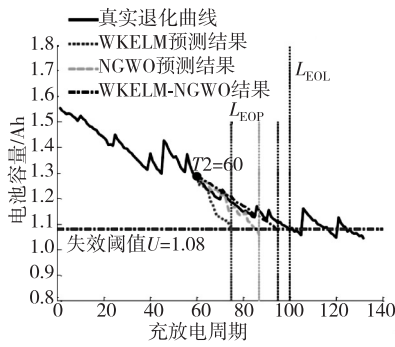


图 2 B1 电池以 $T_2=60$ 为起始点的预测曲线图

Fig. 2 Predicted graph of B1 battery starting from $T_2=60$

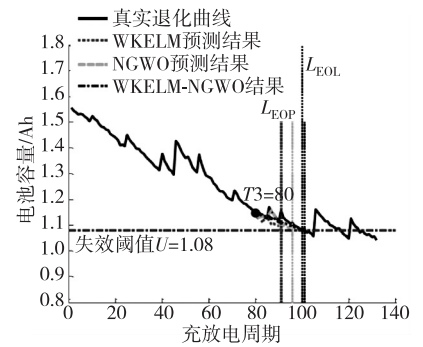


图 3 B1 电池以 $T_3=80$ 为起始点的预测曲线图

Fig. 3 Predicted graph of B1 battery starting from $T_3=80$

表 3 B2 心脏除颤仪用锂电池在不同算法下的 RUL 预测结果

Tab. 3 RUL prediction results of Lithium batteries in B2 cardiac defibrillator under different algorithms

预测起始点	预测方法	L_{EOL}	L_{EOP}	$\Delta_{RUL_{ae}}$	$\delta_{RUL_{re}}(\%)$
前期 $T_1=70$	WKELM	129	86	43	33.33
前期 $T_1=70$	NGWO	129	103	26	20.16
前期 $T_1=70$	WKELM-NGWO	129	151	22	17.05
中期 $T_2=90$	WKELM	129	109	20	15.50
中期 $T_2=90$	NGWO	129	115	12	9.30
中期 $T_2=90$	WKELM-NGWO	129	134	5	3.88
后期 $T_3=110$	WKELM	129	116	13	10.08
后期 $T_3=110$	NGWO	129	123	6	4.65
后期 $T_3=110$	WKELM-NGWO	129	131	2	1.55

4.3 B1 和 B2 电池 3 种算法预测结果对比

由 4.1 和 4.2 的六幅基于 3 种算法的 B1 和 B2 电池 RUL 预测结果图可以看出, WKELM-NGWO 融合算法 B1 电池预测结果基本略微小于 B1 电池的真实寿命值, 而 WKELM-NGWO 融合算法 B2 电池预测结果略微大于 B2 电池的真实寿命值, 这也是选择两种电池进行对比试验的目的所在, 使得实验结果更加真实可靠。但是总体而言, WKELM-NGWO 算法所预测出的 B1 和 B2 电池剩余使用寿命预测结果更符合医疗电子设备锂电池容量的实际退化情况。同时, 无论是 B1 还是 B2 电池, 3 种算法的误差都在随着预测起始点的后推而减小, 预测结果也越来越接近电池的失效阈值。

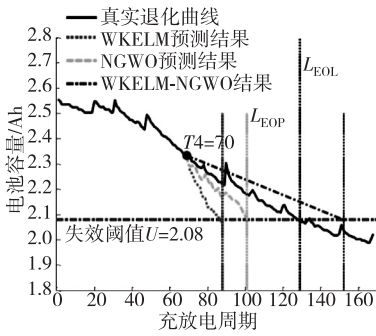


图 4 B2 电池以 $T_4=70$ 为起始点的预测曲线图

Fig. 4 Predicted graph of B2 battery starting from $T_4=70$

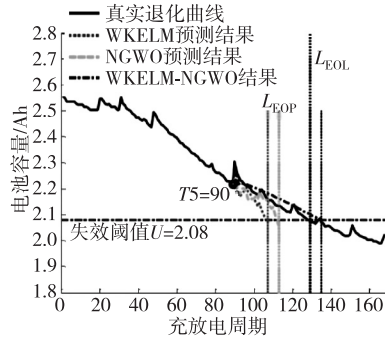


图 5 B2 电池以 $T_5=90$ 为起始点的预测曲线图

Fig. 5 Predicted graph of B2 battery starting from $T_5=90$

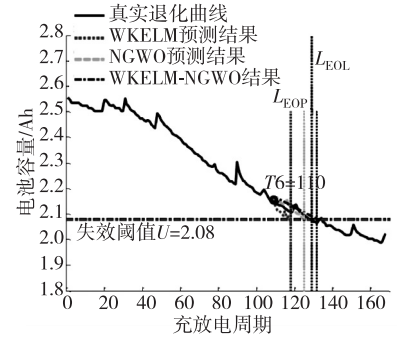


图 6 B2 电池以 $T_6=110$ 为起始点的预测曲线图

Fig. 6 predicted graph of B2 battery starting from $T_6=110$

为进一步评估基于 WKELM, NGWO, WKELM-NGWO 医疗电子设备锂电池 RUL 的预测结果的准确度, 可以根据均方根误差 (Root mean square error, RMSE) 对 WKELM, NGWO, WKELM-NGWO 这 3 种算法的医疗电子设备锂电池 RUL 预测结果进行量化分析。可以定义如下:

$$\delta_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_k^n [C_{\text{real}(k)} - C_{m(k)}]^2}, \quad (16)$$

其中: n 代表数据的长度, $C_{\text{real}(k)}$ 和 $C_{m(k)}$ 分别为在 k 时刻时的医疗电子设备锂电池真实容量和预测容量。这 3 种算法对 B1 电池和 B2 电池的 RUL 预测结果 δ_{RMSE} 值如表 2 所示:

表 4 B1 电池和 B2 电池的 RUL 预测结果 δ_{RMSE} 值

Tab. 4 RUL prediction results δ_{RMSE} values for B1 and B2 batteries

预测起始点	B1 电池			B2 电池		
	$T_1=40$	$T_2=60$	$T_3=80$	$T_4=70$	$T_5=90$	$T_6=110$
WKELM	0.294 73	0.373 86	0.681 23	0.240 15	0.231 04	0.237 51
NGWO	0.234 75	0.248 06	0.426 83	0.173 61	0.146 97	0.113 23
WKELM-NGWO	0.160 64	0.105 17	0.091 93	0.126 12	0.085 28	0.041 39

由表中电池 B1 和 B2 的 δ_{RMSE} 值可知, 在相同的预测起始点下, WKELM-NGWO 算法的 δ_{RMSE} 误差低于 WKELM 和 NGWO 算法, 这意味着基于融合算法 WKELM-NGWO 的医疗电子设备锂电池 RUL 预测曲线更接近电池的退化曲线, 进一步验证了融合算法 WKELM-NGWO 即改进灰狼算法的医疗电子设备锂电池 RUL 预测精度更高, 可靠性更强。WKELM-NGWO 算法预测结果与医疗电子设备锂电池真实的退化趋势曲线相同, 表明融合算法增强了对不同数据的适应能力, 既克服了小波核极限学习机 (WKELM) 学习速度慢、结构不稳定的问题, 也克服了小生境灰狼算法 (NGWO) 求解精度低、收敛速度慢从而导致跳不出局部最优解的问题。

5 结束语

医疗电子设备锂电池剩余寿命预测对医疗电子设备的发展有着十分重要的意义。为了提高医疗电子设备锂电池剩余寿命预测的准确度以及收敛速度,将基于 WKELM,NGWO,WKELM-NGWO 3 种算法的剩余寿命预测结果进行对比分析,并考虑到电池自身因素的影响,选择了 B1(心脏起搏器用锂电池)和 B2(心脏除颤仪用锂电池)两种典型的医疗电子设备锂电池来进行实验对比。实验结果表明 WKELM-NGWO 算法所预测出的 B1 和 B2 电池剩余使用寿命预测结果更符合医疗电子设备锂电池容量的实际退化情况,3 种算法的误差都在随着预测起始点的后推而减小,预测结果也越来越接近电池的失效阈值。

WKELM-NGWO 算法的均方根误差 δ_{RMSE} 值仅为 WKELM 算法的 $1/6$, δ_{RMSE} 值为 NGWO 算法的 $2/3$ 。既克服了小波核极限学习机(WKELM)学习速度慢、结构不稳定的问题,也克服了小生境灰狼算法(NGWO)求解精度低、收敛速度慢从而导致跳不出局部最优解的问题。WKELM-NGWO 算法对医疗电子设备锂电池剩余寿命预测的方法可以作为心脏起搏器、心脏除颤仪等小容量医疗电子设备锂电池的剩余寿命预测手段,对寿命即将殆尽锂电池及时更换,从而把握住救治的关键时间,有效的减少医疗事故的发生。医疗锂电池剩余寿命预测对保障抢救时机并减少医疗事故具有重要意义。

参考文献:

- [1] 彭宇,刘大同.数据驱动故障预测和健康管理综述[J].仪器仪表学报,2014,35(3):481-495.
PENG Y,LIU D T. Overview of data-driven fault prediction and health management[J]. Journal of Scientific Instrument,2014,35(3):481-495.
- [2] MIRJALILI S,MIRJALILI S M,LEWIS A. Grey wolf optimizer[J]. Advances in Engineering Software,2014,69:46-61.
- [3] 秦波,王祖达,孙国栋,等. VMD 能量熵与核极限学习机在滚动轴承故障诊断中的应用[J]. 中国测试,2017,43(5):91-95.
QIN B,WANG Z D,SUN G D, et al. Application of VMD and hierarchical extreme learning machine in rolling bearing fault diagnosis[J]. China Measurement & Test,2017,43(5):91-95.
- [4] 徐继亚,王艳,纪志成. 基于鲸鱼算法优化 WKELM 的滚动轴承故障诊断[J]. 系统仿真学报,2017,29(9):2189-2197.
XU J Y,WANG Y,JI Z C. Fault diagnosis method of rolling bearing based on WKELM optimized by whale optimization algorithm[J]. Journal of System Simulation,2017,29(9):2189-2197.
- [5] TANG J,DENG C,GUANG G B. Extreme learning machine for multilayer perceptron[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems (S2162-237X),2016,27(4):809-821.
- [6] 周建宝,王少军,马丽萍,等. 可重构卫星锂离子电池剩余寿命预测系统研究[J]. 仪器仪表学报,2013,34(9):2034-2044.
ZHOU J B,WANG S J,MA L P, et al. Residual life prediction system for reconfigurable satellite lithiumion batteries [J]. Journal of Scientific Instrument,2013,34(9):2034-2044.
- [7] 王常虹,董汉成,凌明祥,等. 车用锂离子电池剩余使用寿命预测方法[J]. 汽车工程,2015,37(4):476-479.
WANG C H,DONG H C,LING M X, et al. Prediction method for remaining service life of lithium-ion batteries for vehicles[J]. Automotive Engineering,2015,37(4):476-479.
- [8] 王苏湘,彭驭风,赵有璠. 医用电子设备传统电池升级为锂离子电池的可行性研究[J]. 医疗卫生装备,2014,35(9):46-48.
WANG S X,PENG Y F,ZHAO Y F. Feasibility study on upgrading traditional battery of medical electronic equipment to lithium-ion battery[J]. Medical Medical Equipment,2014,35(9):46-48.
- [9] 武兴亮,丁根宏. 改进小生境遗传算法求解多峰函数优化问题[J]. 信息技术,2011(8):73-74.
WU X L,DING G H. Improved niche genetic algorithm for solving multimodal function optimization problems[J]. Information Technology,2011(8):73-74.
- [10] 罗佳,唐斌. 新型灰狼优化算法在函数优化中的应用[J]. 兰州理工大学学报,2016,6(3):97-101.
LUO J,TANG B. Application of new grey wolf optimization algorithm in function optimization [J]. Journal of Lanzhou University of Technology,2016,6(3):97-101.
- [11] 陈晓青,陆慧娟,关伟,等. 基于探测粒子群的小波核极限学习机算法[J]. 计算机科学,2016,43(6A):77-80.
CHEN X Q,LU H J,GUAN W, et al. The algorithm of wavelet kernel limit learning machine based on particle swarm detection [J]. Computer Science,2016,43(6A):

77-80.

[12] ZHOU L N, LIU Y Q, RONALD W, et al. Toroidal plasma response based ELM control coil design for EU DEMO[J]. Nuclear Fusion, 2018, 58(7):0706025.

[13] HATTA N M, ZAIN A M, SALLEHUDDIN R, et al. Recent studies on optimisation method of grey wolf optimiser (GWO): a review(2014—2017) [EB/OL]. (2018-05-22) [2018-10-03]. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10462-018-9634-2>.

Operations Research and Cybernetics

Improved Grey Wolf Optimization Algorithm for Life Prediction of Medical Lithium Batteries

HE Cheng¹, LIU Changchun², WU Yang², WU Tao², CHEN Tong³

(1. School of Intelligent Manufacturing and Control Engineering, Shanghai Polytechnic University;

2. School of Environmental and Material Engineering, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209;

3. Shanghai First People's Hospital, Shanghai 200080, China)

Abstract: [Purposes] To improve the life expectancy of medical lithium batteries by improving the gray wolf optimization algorithm, so as to ensure the rescue timing and reduce the purpose of medical accidents. [Methods] The improved gray wolf optimization algorithm WKELM-NGWO algorithm was formed by the algorithm of wavelet kernel learning machine (WKELM) and niche grey wolf algorithm (NGWO). The NGWO algorithm is used to optimize the WKELM parameters, and the classification accuracy of the training set is maximized as the objective function to obtain the mathematical model of the optimization process. The time series of the lithium battery capacity of the medical electronic device is processed by differential method, and the multi-dimensional time series feature vector is obtained, and the feature vector is obtained by normalization, and is divided into a training set and a test set. The fitness value of each gray wolf individual is calculated, and the fitness value is sorted. The individual positions of the fitness value ranked in the first three are respectively recorded as . After selecting the optimal gray wolf individual position as the WKELM parameter to train the data, the remaining life prediction operation is performed on the lithium battery B1 of the cardiac pacemaker and the lithium battery test sample for the cardiac defibrillator. [Findings] Under the same prediction starting point, the root mean square error (RMSE) error of the WKELM-NGWO algorithm is lower than that of the WKELM and NGWO algorithms, and the remaining life of the medical electronic device based on the fusion algorithm WKELM-NGWO (Remaining Useful Life) The prediction curve is closer to the degradation curve of the battery. [Conclusions] The WKELM-NGWO fusion algorithm enhances the adaptability to different data, overcomes the problem of slow learning and structural instability of the wavelet kernel limit learning machine (WKELM), and overcomes the niche grey wolf algorithm (NGWO). Low precision and slow convergence result in the problem of not jumping out of the local optimal solution.

Keywords: medical lithium battery; remaining useful life prediction; wavelet kernel extreme learning machine; niche grey wolf optimization; improved grey wolf optimization algorithm WKELM-NGWO

(责任编辑 陈 乔)

两阶段供应链下极小化最大完工时间的单机系列批排序*

张新功¹, 陈娟²

(1. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331; 2. 重庆市大渡口区公民小学校, 重庆 400084)

摘要:【目的】考虑单机情况下的加工和运输两阶段的供应链排序问题。【方法】在生产阶段,将所有工件在加工之前划分成批,在一台有限批容量的机器上加工,工件的实际加工时间是关于该工件退化率和加工位置的函数;在运输阶段,有一辆运输车,且每次只能运输一批工件,即车的容量等于批的容量。通过分析用运输车的车容量限制与工件个数的关系。【结果】由最优算法得到了一个最优排序和最小化最大完工时间。【结论】首先给出最大完工时间问题的一个下界,然后指出在当工件个数小于等于运输车的容量限制时,提供出来一个最优算法。对于当工件个数大于运输车的容量限制时,证明了当工件满足一定条件时,该问题也存在最优算法。

关键词:批排序;供应链;退化率;时间与位置相关

中图分类号:O223

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)04-0001-06

在实际生产中,如何高效协调生产和运输两阶段之间关系以提高生产效率、增加市场竞争力的问题已经越来越受到关注。Hall等人^[1]首次提出了供应链排序概念,之后出现了各种不同的关于供应链排序问题的研究。Zegordi等人^[2]研究了多个生产商处在不同地理位置,并且运输车辆的速度不同的两阶段供应链排序问题,用动态规划算法给出了目标函数是最大完工时间问题的解。

关于工件退化问题已经有很多研究。Wang等人^[3]考虑了工件同时带有退化效应和学习效应的单机排序问题,并用启发式算法给出了目标函数为总完工时间问题的解法。Wang等人^[4]考虑了非线性退化的单机排序问题,并证明了非线性退化条件下的极小化最大完工时间是多项式时间可解的。谢秋莲等人^[5]研究了带有线性位置退化及维修区间的单机排序问题,证明了在最大完工时间情形下工件满足组平衡原则,总完工时间问题转化为线性指派问题,并给出了这两个问题的多项式时间算法。

目前在批排序的研究中,Li等人^[6]对加工时间线性退化的批排序问题给出了详细说明。系列批排序问题与成组排序有很多相似之处,成组排序是根据生产的具体要求进行提前分组加工,在系列批排序中要考虑机器的生产能力,也就是批的最大容量是必须考虑的因素,但成组排序中不需要考虑。另一方面,在成组排序中,所有工件已经提前被分在确定的组里,而系列批排序中工件如何分批,以及批之间的加工顺序需要同时考虑。Pei等人^[7]把两阶段供应链、退化效应和系列批综合在一起考虑,建立了一个最优算法解决在有缓冲区的情况下的极小化最大完工时间,建立了一个启发式算法解决无缓冲区的情况下极小化最大完工时间。本文研究具有位置效应的情形。首先,分别考虑了当 $n \leq c$ 和 $n > c$ 两种情形下的最大完工时间问题的下界,并给出解决该问题的一个最优算法,这里的 c 为批与运输车辆的最大容量。然后,对于 $n > c$ 的情形,进一步考虑 $T \leq Q_2$, $T \geq Q_m$ 和 $Q_2 < T < Q_m$ 这3种子情形,这里的 T 是车辆在生产商和顾客之间往返一次所用时间,并证明当工件满足一定条件时,该问题存在最优算法。

1 模型描述与符号介绍

本文所要用到的符号如下。 J_i 为第 i 个工件,其中 $i=1,2,\dots,n$ (下同); P_i 为工件 J_i 的加工时间; b_i 为工件 J_i 的退化率; a 为学习指数, $a > 0$; a_0 为固定常数; t_0 为所有工件在 t_0 可以加工; n 表示所有工件的个数; m 为批的

* 收稿日期:2017-11-01 修回日期:2019-02-28 网络出版时间:2019-07-15 12:30

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11571321;No. 715610007);国家自然科学基金重点项目(No. 11431004);重庆市研究生教育教
学改革研究重点项目(No. yig182019);重庆市基础科学与前沿技术研究专项(No. cstc2018jcyjAX0631)

第一作者简介:张新功,男,教授,博士,研究方向为排序论,E-mail:zxcg7980@163.com;通信作者:陈娟,女,E-mail:cj123581321@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1230.036.html>

数量; B_k 为第 k 批, 其中 $k=1, 2, \dots, m$ (下同); Q_k 为第 k 批的实际加工时间; n_k 为第 k 批的数量; c 为批与运输车辆的最大容量; r 为工件的位置; T 为工件到客户的往返运输时间; $S_{1k}(S_{2k})$ 为加工(运输)第 k 批工件的开始时间; $C_{1k}(C_{2k})$ 为加工(运输)第 k 批工件的结束时间; C_{\max} 为所有工件的最大完工时间。

本文研究供应链排序包括两个阶段, 即加工阶段和运输阶段。在加工阶段, 由 n 个工件构成的工件集合 $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ 在 $t_0=0$ 已经到达, 并且都可以开始加工。工件在加工之前被划分成批, 然后在台批处理机上加工。Xuan 等人^[8]指出在系列批排序里, 要求同一批的工件连续加工。批完工时间被定义为批内工件加工时间之和, 批的最大容量为 c , 每批的工件个数不能超过批的最大容量 c , 即 $n_k \leq c$ 。工件 J_i 的实际加工时间是关于退化率和加工位置相关的函数, 即 $P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, i=1, 2, \dots, n$ 。

在运输阶段, 只有一辆车在来回运输已经加工好的工件, 车辆的最大容量正好等于批的最大容量且每次只能运输一批工件, 车辆在生产商和顾客之间往返一次所用时间为常数 T , 则单程的时间为 $\frac{T}{2}$ 。在供应链排序中, 通常研究两种类型的问题: 第一种是在生产商一方存在仓库存放已经加工的工件, 不管车辆到达与否, 机器都可以立即加工下一批工件。第二种则是生产商一方没有仓库存放已经加工的工件, 机器必须等到运输上一批的车辆到达以后才能加工下一批工件。本文主要研究第一种类型, 即存在仓库存放已经加工的工件, 机器可以立即加工下一批工件, 目标是极小化加工与运输两阶段的最大完工时间。用 Graham^[9]的三参数表示法可将问题表述成 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$ 。

2 最大完工时间问题

引理 1 研究问题模型 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$ 最优排序满足性质:

$$C_{\max}^* \geq \begin{cases} \max \left\{ t_0 + Q_1 + \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T, t_0 \prod_{i=1}^n (1 + b_i i^a) + a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2} \right\}, n > c; \\ t_0 \prod_{i=1}^n (1 + b_i i^a) + a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}, n \leq c. \end{cases} \quad (1)$$

证明 当 $n > c$ 时, 机器加工完第一批工件以后, 假设在运输阶段没有空闲时间, 即从第二批开始每一批加工时间都会等于或小于运输时间, 则可计算出最大完工时间的一个下界, $C_{\max}^* \geq t_0 + Q_1 + \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T$ 。同理, 在生产阶段中, 假设每批工件加工完以后, 马上就会被运走, 即从第二批开始每一批加工时间都会不小于运输时间 T , 则最大完工时间的一个下界为 $C_{\max}^* \geq t_0 \prod_{i=1}^n (1 + b_i i^a) + a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}$ 。因此有 $C_{\max}^* \geq$

$$\max \left\{ t_0 + Q_1 + \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T, t_0 \prod_{i=1}^n (1 + b_i i^a) + a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2} \right\}。$$

当 $n \leq c$ 时, 此时只有一批工件加工, 则最大完工时间的下界为:

$$C_{\max}^* \geq t_0 \prod_{i=1}^n (1 + b_i i^a) + a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}。 \quad \text{证毕}$$

本文研究分批排序问题, 通过讨论工件数 n 与批容量 c 的大小关系, 对问题进行分析并求解。下面的定理 1 给出了当 $n \leq c$ 时, 最优排序是所有工件按照退化率非增的顺序排列并在同一批加工。

定理 1 研究问题 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$, 如果 $n \leq c$, 那么在最优排序中, 所有工件按照退化率非增的顺序排列并在同一批加工。

证明 当 $n \leq c$, 假设存在一个最优排序满足 $m > 1$ 。因为 $n \leq c$, 工件能从其他批里移动到 B_1 中, 则最大完工

$$\text{时间为 } C'_{\max} = C'_{21} = a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2} \leq C_{\max}^*。$$

移动以后的排序仍然满足最优排序的性质。

证毕

基于定理 1, 所有的工件都在 B_1 中加工, 工件按照退化率非增的顺序排列, 把排序记为 π^* 。对于 π^* 中任意两个相邻的工件 J_i 和 J_j , 工件 J_i 在第 r 位置加工, 工件 J_j 在第 $r+1$ 位置上加工, 工件 J_i 的开始加工时间为 t , 完工时间为 $C_i(\pi^*)$, 工件 J_j 完工时间为 $C_j(\pi^*)$, 则有:

$$C_i(\pi^*) = t + (a_0 + b_i t) r^a = (1 + b_i r^a) t + a_0 r^a,$$

$C_j(\pi^*) = C_i(\pi^*) + (a_0 + b_i C_i(\pi^*)) (r+1)^a = (1 + b_j (r+1)^a) (1 + b_i r^a) t + (1 + b_j (r+1)^a) a_0 r^a + a_0 (r+1)^a$ 。
 通过交换 J_i 和 J_j 工件位置,其余工件位置不变,得到另一个排序记为 π' ,此时工件 J_i 的完工时间为 $C_i(\pi')$,则有:

$$C_i(\pi') = (1 + b_i (r+1)^a) (1 + b_j r^a) t + (1 + b_i (r+1)^a) a_0 r^a + a_0 (r+1)^a,$$

$$C_i(\pi') - C_j(\pi^*) = (b_i - b_j) ((r+1)^a - r^a) t + (b_i - b_j) (r+1)^a a_0 r^a \geq 0。$$

所以原排序是最优排序。

证毕

对于两阶段供应链、工件的退化效应和系列批排序问题,关于有缓冲区,即有仓库存放已经加工的工件的排序问题的研究还很少,本文采用 Pei 等人^[7]解决含有缓冲区的排序问题的一个最优算法以得到最大完工时间。

算法 1 第 1 步,把工件按退化率不增的顺序标号,即 $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$;

第 2 步,如果在一个工件列表中工件个数小于其最大容量 c ,那么把所有工件放在一个批里,转到第 4 步,否则把前

$\left\lceil n - c \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1 \right) \right\rceil$ 个工件放在第一批里;

第 3 步,如果存在未排列的工件,则把前 c 个工件放在一个批里,依次迭代,否则转到第 4 步;

第 4 步,按批次自然生成的批顺序依次在机器上加工。

在定理 1 中,讨论了当 $n \leq c$ 时的最优排序。接下来讨论当 $n > c$ 时的情况,定理 2 研究了当工件满足一定条件时,由算法 1 可得到排序满足性质 $Q_{k+1} \geq Q_k (k=1, 2, 3, \dots, m-1)$ 。

定理 2 对于问题 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$, 如果 $n > c$, 有:

$$\left[1 + b \sum_{h=1}^k n_{h+1} \left(\sum_{h=1}^k n_h + 1 \right)^a \right] \left[1 + b \sum_{h=1}^k n_{h+2} \left(\sum_{h=1}^k n_h + 2 \right)^a \right] \geq 2, \tag{2}$$

其中 $k=1, 2, \dots, m$, 由算法 1 知该排序满足性质 $Q_{k+1} \geq Q_k, k=1, 2, \dots, m-1$ 。

证明 当 $k \geq 2$ 时,有:

$$Q_k = C_{1k} - S_{1k} = a_0 \sum_{j=1}^k j^a \prod_{i=j+1}^k (1 + b_i i^a) - a_0 \sum_{j=1}^{k-1} j^a \prod_{i=j+1}^{k-1} (1 + b_i i^a),$$

$$Q_{k+1} = C_{1,k+1} - S_{1,k+1} = a_0 \sum_{j=1}^{k+1} j^a \prod_{i=j+1}^{k+1} (1 + b_i i^a) - a_0 \sum_{j=1}^k j^a \prod_{i=j+1}^k (1 + b_i i^a),$$

$$Q_{k+1} - Q_k = a_0 \left[1^a \prod_{i=2}^{k+1} (1 + b_i i^a) + 2^a \prod_{i=3}^{k+1} (1 + b_i i^a) + \dots + (n_1 + n_2 + \dots + n_{k+1})^a + 1^a \prod_{i=2}^{k-1} (1 + b_i i^a) + \right.$$

$$2^a \prod_{i=3}^{k-1} (1 + b_i i^a) + \dots + (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1})^a - 21^a \prod_{i=2}^k (1 + b_i i^a) - 22^a \prod_{i=3}^k (1 + b_i i^a) - \dots - 2(n_1 + n_2 + \dots + n_k)^a \left. \right] =$$

$$a_0 \left\{ 1^a \prod_{i=2}^{k-1} (1 + b_i i^a) \left[\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1} n_l + 1}^{k+1} (1 + b_i i^a) + 1 - 2 \prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1} n_l + 1}^k (1 + b_i i^a) \right] + \right.$$

$$2^a \prod_{i=3}^{k-1} (1 + b_i i^a) \left[\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1} n_l + 1}^{k+1} (1 + b_i i^a) + 1 - 2 \prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1} n_l + 1}^k (1 + b_i i^a) \right] + \dots +$$

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + 1)^a \prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1} n_l + 2}^k (1 + b_i i^a) \left[\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1} n_l + 1}^{k+1} (1 + b_i i^a) - 2 \right] + \dots + (n_1 + n_2 + \dots + n_k)^a \left[\prod_{i=\sum_{l=1}^k n_l + 1}^{k+1} (1 + b_i i^a) - 2 \right] \left. \right\}。$$

因此只需比较 $\prod_{i=\sum_{l=1}^k n_l + 1}^{k+1} (1 + b_i i^a) - 2 (k=1, 2, \dots, m)$ 与 0 的大小关系。

基于(2)式知 $Q_{k+1} \geq Q_k$ 。则当 $k=1$ 时,有:

$$Q_1 = a_0 \sum_{j=1}^{n_1} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1} (1 + b_i i^a), Q_2 = a_0 \sum_{j=1}^{n_1+n_2} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1+n_2} (1 + b_i i^a) - a_0 \sum_{j=1}^{n_1} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1} (1 + b_i i^a),$$

$$Q_2 - Q_1 = a_0 \sum_{j=1}^{n_1+n_2} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1+n_2} (1 + b_i i^a) - 2a_0 \sum_{j=1}^{n_1} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1} (1 + b_i i^a) \geq$$

$$a_0 \left[1^a \prod_{i=2}^{n_1} (1 + b_i i^a) \left(\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (1 + b_i i^a) - 2 \right) + 2^a \prod_{i=3}^{n_1} (1 + b_i i^a) \left(\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (1 + b_i i^a) - 2 \right) + \cdots + n_1^a \left(\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (1 + b_i i^a) - 2 \right) \right].$$

由定理中的条件得 $Q_2 \geq Q_1$ 成立。

证毕

上述定理讨论了当工件满足(2)式时,由算法 1 可得该排序满足 $Q_{k+1} \geq Q_k$ 。接下来在 $n > c$ 和(2)式的前提下,进一步研究 $T \leq Q_2$ 时,工件的最优排序和最大完工时间。

定理 3 对于问题 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$, 如果 $n > c$, 有:

$$\left[1 + b \sum_{h=1}^k n_{h+1} \left(\sum_{h=1}^k n_h + 1 \right)^a \right] \left[1 + b \sum_{h=1}^k n_{h+2} \left(\sum_{h=1}^k n_h + 2 \right)^a \right] \geq 2,$$

其中 $k=1, 2, \dots, m$, 当 $T \leq Q_2$ 时,由算法 1 可得一个最优排序,且最大完工时间为:

$$C_{\max} = a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}.$$

证明 由定理中的条件易知, $T \leq Q_2 \leq Q_3 \leq \dots \leq Q_m$, 因此 B_k 在运输阶段的完工时间为:

$$C_{2k} = a_0 \sum_{j=1}^{\sum_{h=1}^k n_h} j^a \prod_{i=j+1}^{\sum_{h=1}^k n_h} (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}.$$

$$\text{因此有 } C_{\max} = C_{2m} = a_0 \sum_{j=1}^{\sum_{h=1}^m n_h} j^a \prod_{i=j+1}^{\sum_{h=1}^m n_h} (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2} = a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}.$$

证毕

定理 3 中叙述了从第二批开始每一批的加工时间都不小于往返的运输时间,所以最大完工时间为所有批加工时间和加上最后一批的运输时间 $\frac{T}{2}$ 。接下来在 $n > c$ 和(2)式的前提下,进一步研究 $T \geq Q_m$ 时,工件的最优排序和最大完工时间。

定理 4 对于问题 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$, 若:

$$n > c, \left[1 + b \sum_{h=1}^k n_{h+1} \left(\sum_{h=1}^k n_h + 1 \right)^a \right] \left[1 + b \sum_{h=1}^k n_{h+2} \left(\sum_{h=1}^k n_h + 2 \right)^a \right] \geq 2,$$

则当 $T \geq Q_m$ 时,由算法 1 可得一个最优排序,且最大完工时间为:

$$C_{\max} = a_0 \sum_{j=1}^{n-c} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c} (1 + b_i i^a) + \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T.$$

证明 $C_{\max} = C_{2m} = C_{2\lceil \frac{n}{c} \rceil} = S_{2\lceil \frac{n}{c} \rceil} + \frac{T}{2} = \max \{ S_{2(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1)} + T, C_{\lceil \frac{n}{c} \rceil} \} + \frac{T}{2} =$

$$C_{11} + T \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1 \right) + \frac{T}{2} = a_0 \sum_{j=1}^{n-c} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c} (1 + b_i i^a) + \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T.$$

证毕

上面讨论了在 $n > c$ 和(2)式的前提下,当 $T \geq Q_m$ 时,即当往返运输时间不小于每一批的加工时间时,那么最大完工时间为第一批的加工时间与 $\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T$ 的和。接下来考虑 $T \geq Q_2$ 的情况下,通过一定条件的限制,使它的最大完工时间为所有批加工时间和加上最后一批的运输时间 $\frac{T}{2}$ 。

定理 5 模型 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$, 如果 $T \geq Q_2$, 则有:

$$T \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1 \right) + a_0 \sum_{j=1}^{n-c} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c} (1 + b_i i^a) \leq a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a). \quad (3)$$

那么根据算法 1 可得一个最优排序,且最大完工时间为 $C_{\max} = a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}$ 。

证明 由条件知,一定存在两个批 B_p 和 B_q , 满足 $S_{2p} + T \geq C_{1p+1}, S_{2q} + T \leq C_{1q+1}, 1 \leq p < q \leq \lceil \frac{n}{c} \rceil - 1$, 则 B_{q+1} 在运输阶段的完工时间为:

$$C_{2q+1} = S_{2q+1} + \frac{T}{2} = \max\{S_{2q} + T, C_{1q+1}\} + \frac{T}{2} = C_{1q+1} + \frac{T}{2} = \sum_{j=1}^{q+1} j^a \prod_{i=j+1}^{q+1} (1 + b_i i^a),$$

$$C_{\max} = C_{2m} = a_0 \sum_{j=1}^m j^a \prod_{i=j+1}^m (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}.$$

证毕

前面几个定理给出了当工件分别满足(2),(3)式时,工件的最优排序和最大完工时间。接下来研究 $T \geq Q_2$ 时,在一定条件下,最优排序满足如下的两条性质。

定理 6 对于问题模型 $M \rightarrow V | P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} | C_{\max}$, 如果:

$$T \geq Q_2, T \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right) + a_0 \sum_{j=1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} (1 + b_i i^a) \geq a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a),$$

则最优排序满足下面的性质:1) $m = \lceil \frac{n}{c} \rceil$; 2) $n_1 = n - c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)$ 。

证明 1) 由于批的数量最少可能是 $\lceil \frac{n}{c} \rceil$, 所以 $m \geq \lceil \frac{n}{c} \rceil$ 。当 $m = \lceil \frac{n}{c} \rceil$ 时,把最大完工时间记为 C_{\max} 。假设存在一个最优排序满足 $m > \lceil \frac{n}{c} \rceil$, 最大完工时间为 C'_{\max} 。

$$C_{\max} = a_0 \sum_{j=1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} (1 + b_i i^a) + T \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - \frac{1}{2} \right), C'_{\max} = a_0 \sum_{j=1}^{n_1} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1} (1 + b_i i^a) + T \left(m - \frac{1}{2} \right),$$

$$C'_{\max} - C_{\max} \geq T - a_0 \sum_{j=1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} (1 + b_i i^a) \geq T - Q_1 > 0,$$

所以 $C'_{\max} > C_{\max}$, 与假设矛盾,即 $m = \lceil \frac{n}{c} \rceil$ 。

2) 由于 $m = \lceil \frac{n}{c} \rceil$, 因此 $n_1 \geq n - c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)$ 。反证,假设存在一个最优排序 π^* 满足 $m = \lceil \frac{n}{c} \rceil$, 且 $n_1 > n - c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)$, 将批 B_1 中的一个工件 J_x 转移到 $B_k (n_k < c)$ 中得到一个新的排序 π' , 它的最大完工时间为 $C_{\max}(\pi')$ 。

$$C_{\max}(\pi') - C_{\max}(\pi^*) =$$

$$a_0 1^a \prod_{i=2}^{x-1} (1 + b_i i^a) [(1 + b_{x+1} x^a) \cdots (1 + b_{n_1} (n_1 - 1)^a) - (1 + b_x x^a) (1 + b_{x+1} (x + 1)^a) \cdots (1 + b_{n_1} n_1^a)] + \cdots +$$

$$a_0 (x - 1)^a [(1 + b_{x+1} x^a) \cdots (1 + b_{n_1} (n_1 - 1)^a) - (1 + b_x x^a) (1 + b_{x+1} (x + 1)^a) \cdots (1 + b_{n_1} n_1^a)] + \cdots +$$

$$a_0 (n_1 - 1)^a [1 - 1 + b_{n_1} n_1^a] < 0,$$

即 $C_{\max}(\pi') < C_{\max}(\pi^*)$, 这是矛盾的,则 $n_1 = n - c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)$ 。证毕

综合上述几个定理,能得到以下结论:1) 当 $n \leq c$ 或当 $n > c, T \leq Q_2$, 在(2)式条件下或当 $n > c, T \geq Q_2$, 在(3)式条件下,通过最优算法能得到一个最优排序和 $C_{\max}^* = a_0 \sum_{j=1}^n j^a \prod_{i=j+1}^n (1 + b_i i^a) + \frac{T}{2}$ 。2) 当 $n > c, T \geq Q_m$ 和在(2)

式的条件下,通过最优算法能得到一个最优排序和 $C_{\max}^* = a_0 \sum_{j=1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1 \right)} (1 + b_i i^a) + \left(\lceil \frac{n}{c} \rceil - \frac{1}{2} \right) T$ 。

3 结束语

本文主要研究工件在加工和运输两个阶段下的单机供应链排序问题,工件实际加工时间是关于工件的退化

率和加工位置的函数。目标函数是极小化最大完工时间。本文通过一个引理给出最大完工时间的一个下界,对于工件个数与车辆容量限制的两种大小关系,以及车辆在生产商和顾客之间往返一次所用时间与第 m 批加工时间大小关系,得到了通过最优算法能得到一个最优排序和最小化最大完工时间。在后续研究中主要是在仓库容量无限的情况下讨论,且在实际生产中,仓库容量和成本问题也是值得考虑的。

参考文献:

- [1] HALL N G, POTTS C N. Supply chain scheduling: batching and delivery[M]. *Operations Research*, 2003, 51(4): 566-584.
- [2] ZEGORDI S H, BEHESHTI-NIA M A. Integrating production and transportation scheduling in a two-stage chain considering order assignment[J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, 44(9/10): 928-939.
- [3] WANG J B, WANG M Z, JI P. Single machine total completion time minimization scheduling with a time-dependent learning effect and deteriorating jobs[J]. *International Journal of Systems Science*, 2012, 43(5): 861-868.
- [4] WANG J B, WANG M Z. Single-machine scheduling with nonlinear deterioration[J]. *Optimization Letters*, 2012, 6(1): 97-98.
- [5] 谢秋莲, 张新功. 带有线性位置恶化及维修区间的单机排序问题[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 32(5): 32-37.
- XIE Q L, ZHANG X G. Single machine scheduling with a linear position deterioration and rate-modifying maintenance [J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2015, 32(5): 32-37.
- [6] LI S S, NG C T, CHENG T C E, et al. Parallel-batch scheduling of deteriorating jobs with release dates to minimize the makespan [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 210(3): 482-488.
- [7] PEI J, PANOS M P, LIU X B, et al. Serial batching scheduling of deteriorating jobs in a two-stage supply chain to minimize the makespan [J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 244(1): 13-25.
- [8] XUAN H, TANG L X. Scheduling a hybrid flowshop with batch production at the last stage [J]. *Computers & Operations Research*, 2007, 34(9): 2718-2733.
- [9] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey [J]. *Annals of Discrete Mathematics*, 1979, 5(1): 287-326.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine with Serial Batching in a Two-Stage Supply Chain to Minimize the Makespan

ZHANG Xingong¹, CHEN Juan²

(1. College of Mathematics Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. Gongmin Primary School of Dadukou District of Chongqing, Chongqing 400084, China)

Abstract: [Purposes] The scheduling problem of a two-stage supply chain is investigated, where the job is first processed on a machine, and then the finished job is delivered into batches. [Methods] During the production stage the job is first divided into serial batches and process on a machine where the actual job processing time is a function of its deterioration rate and position. During the stage of transportation, the batches are delivered to a customer by a single vehicle and the vehicle can only deliver one batch at one time. [Findings] The relations between capacity of vehicle and the number of jobs are analyzed. [Conclusions] A lower bound of the maximum completion time problem is given, then the problem can be easily solved when $n \leq c$. it is proved that the problem also has an optimal algorithm when the jobs satisfies certain conditions when $n > c$.

Keywords: batch scheduling; supply chain; deterioration; time-dependent and position-dependent

(责任编辑 黄颖)

带不耐烦顾客和工作故障的多重休假排队系统*

马占友¹, 曹建¹, 于向然¹, 郭闪闪¹, 陈利²

(1. 燕山大学 理学院; 2. 燕山大学 里仁学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要:【目的】为了拓展随机排队理论,在M/M/1多重休假排队模型的基础上,引入不耐烦顾客和工作故障策略,建立了一个新的排队模型。【方法】构建系统稳态下的平衡方程,运用母函数法求解,推导出服务台处于不同状态时系统中顾客数的概率母函数,进而得到系统稳态下平均队长等性能指标的表达式,通过数值举例分析系统参数与系统性能指标的关系。基于博弈论知识,构建效用函数优化模型,分析顾客的均衡策略以及社会最优策略。【结果】建立并分析了带有不耐烦顾客和工作故障的多重休假排队系统。【结论】为现实排队中服务商和顾客提供风险预测和决策评估。

关键词:不耐烦顾客;工作故障;多重休假;均衡策略;社会最优策略

中图分类号: O226

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)04-0007-07

自从休假排队系统被提出以来,它被广泛地应用到网络、计算机等实际生活中,对排队理论产生了巨大的影响。许多学者将不耐烦顾客策略与休假策略相结合,取得了一些研究成果^[1-9]。Altman等人^[1]分析了由于服务台休假而出现不耐烦顾客的排队模型,通过求解平衡方程得到队长等性能指标。Yue等人^[2]研究了带不耐烦顾客策略的工作休假排队模型,得到性能指标以及排队系统的稳态条件。Selvaraju等人^[3]在文献[1-2]的基础上,分析了带不耐烦顾客的多重、单重工作休假排队模型。Yechiali等人^[4]分别在M/M/1, M/M/c以及M/M/∞排队模型的基础上,研究了带有不耐烦顾客的两阶段排队模型,得到性能指标的表达式。在许多排队文献中,服务台被假定是稳定可靠的,但在实际生活中,服务台一般会出现故障并需要修理。Kalidass等人^[5]分析了带工作故障的排队系统,推导出平均队长和平均响应时间等性能指标。Yang等人^[6]将工作故障策略与不耐烦顾客策略相结合,分析了有限空间下的排队系统。王金亭^[7]基于博弈论知识分析了各类排队模型的均衡进队策略。Wang等人^[8]在带门控策略的双端排队系统中,分析了3种不同信息情境下的顾客均衡策略以及社会最优策略。本文在M/M/1多重休假排队模型的基础上,引入工作故障策略以及不耐烦顾客策略,分析新的排队模型,为实际生活中服务商和顾客的决策提供理论支持。

1 模型描述

对带不耐烦顾客以及工作故障的多重休假排队系统进行了描述,并假定相关的系统参数值。

1) 顾客的到达服从参数为 λ 的泊松过程且单个到达。

2) 当服务台处于正规忙期,顾客的服务时间服从参数为 μ_1 的指数分布。服务台只在正规忙期发生故障,发生故障的概率为 α ,服务台在发生故障之后并不停止服务,而是以一个低于正常水平的服务率提供服务,顾客的服务时间服从参数为 μ_2 的指数分布,其中 $\mu_2 < \mu_1$ 。对发生故障的服务台立刻进行修理,假定修理时间服从参数为 β 的指数分布,修理结束后,服务台按照正常状态提供服务。

3) 当系统中无到达顾客时,服务台立刻开始休假,在该次休假结束时,系统中仍没有顾客,则服务台再进行一次独立同分布的休假,直到有顾客到达系统,服务才开始,其中休假时间服从参数为 θ 的指数分布。

4) 服务台在工作故障期的服务率较低,考虑顾客的不耐烦情绪。当顾客在服务台工作故障期到达系统时,

* 收稿日期:2018-09-03 修回日期:2019-06-17 网络出版时间:2019-07-15 12:30

资助项目:国家自然科学基金(No. 61472342);河北省自然科学基金(No. A2018203088);河北省高等学校自然科学研究重点项目(No. ZD2017079);河北省高等学校科学技术研究青年基金(No. QN2016016)

第一作者简介:马占友,男,教授,博士,研究方向是排队论研究及网络性能分析,E-mail: mzhzy55@ysu.edu.cn;通信作者:曹建,男,E-mail: ydcaojian@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1230.014.html>

将会激活一个随机长度 T 的不耐烦计时器,如果在不耐烦计时器到期前服务台被修理好,则顾客继续留在系统中直到完成服务。当服务台仍处在工作故障期,如果顾客在不耐烦计时器到期时没有接受完服务,就会变得不耐烦而离开系统,假设 T 服从参数为 ξ 的指数分布。

5) 假定顾客的到达过程、服务过程等相互独立,且服从先到先服务的服务规则。

2 稳态分析

2.1 系统的平衡方程

令 $N(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数, $J(t)$ 表示 t 时刻服务台的状态,并令:

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处于休假状态;} \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处于正规忙期状态;} \\ 2, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处于工作故障状态.} \end{cases}$$

则 $\{(N(t), J(t)), t \geq 0\}$ 是一个连续时间的二维 Markov 过程,且状态空间为 $\Omega = \{(0, 0) \cup (i, j), i \geq 1, j = 0, 1, 2\}$ 。

定义系统的稳态概率: $P_{n,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, J(t) = j\}$, $(n, j) \in \Omega$, 则排队模型的状态转移如图 1 所示。

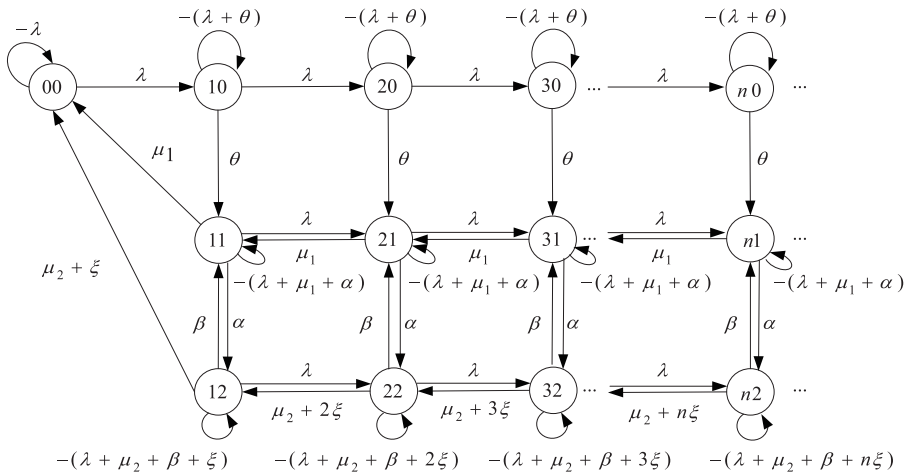


图 1 排队模型的状态转移

Fig. 1 State transition of the queueing model

系统稳态下的平衡方程为:

$$\lambda P_{00} = \mu_1 P_{11} + (\mu_2 + \xi) P_{12}, \quad (1)$$

$$(\lambda + \theta) P_{n,0} = \lambda P_{n-1,0}, n \geq 1, \quad (2)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \alpha) P_{11} = \theta P_{10} + \beta P_{12} + \mu_1 P_{21}, \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \alpha) P_{n,1} = \lambda P_{n-1,1} + \theta P_{n,0} + \beta P_{n,2} + \mu_1 P_{n+1,1}, n \geq 2, \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu_2 + \beta + \xi) P_{12} = \alpha P_{11} + (\mu_2 + 2\xi) P_{22}, \quad (5)$$

$$(\lambda + \mu_2 + \beta + n\xi) P_{n,2} = \lambda P_{n-1,2} + \alpha P_{n,1} + (\mu_2 + (n+1)\xi) P_{n+1,2}, n \geq 2. \quad (6)$$

定义部分概率母函数 $G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,0} z^n$, $G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,1} z^n$, $G_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,2} z^n$, 且有: $G'_i(z) = \frac{d}{dz} G_i(z) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P_{n,i} z^{n-1}, i = 0, 1, 2.$$

在(2)式的两边乘以 z^n , 并对所有 n 求和, 得:

$$G_0(z) = \frac{\lambda + \theta}{\lambda(1-z) + \theta} P_{00}. \quad (7)$$

同理, 由(3), (4)式及(5), (6)式, 分别得:

$$\varphi(z) G_1(z) - \theta z G_0(z) - \beta z G_2(z) = -\theta P_{00} z - \mu_1 P_{11} z, \quad (8)$$

$$\omega(z) G_2(z) + \xi z(z-1) G'_2(z) - \alpha z G_1(z) = -(\mu_2 + \xi) P_{12} z, \quad (9)$$

其中 $\omega(z) = -\lambda z^2 + (\lambda + \mu_2 + \beta)z - \mu_2$, $\varphi(z) = -\lambda z^2 + (\lambda + \mu_1 + \alpha)z - \mu_1$ 。

将(7)式代入(8)式,得:

$$G_1(z) = \frac{\beta z}{\varphi(z)} G_2(z) + \frac{\lambda \theta z^2}{(\lambda(1-z) + \theta)\varphi(z)} P_{00} - \frac{\mu_1 z P_{11}}{\varphi(z)}. \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式,并结合(1)式,整理得:

$$G_2'(z) = \frac{\omega(z)\varphi(z) - \alpha\beta z^2}{\xi(1-z)z\varphi(z)} G_2(z) = \left[\frac{\lambda}{\xi(1-z)} - \frac{\alpha\lambda\theta z^2}{\xi(1-z)(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z)} \right] P_{00} + \left[\frac{\alpha\mu_1 z}{\xi(1-z)\varphi(z)} - \frac{\mu_1}{\xi(1-z)} \right] P_{11}. \quad (11)$$

2.2 微分方程求解

为了求解(11)式,假设 z_1 和 z_2 是方程 $\varphi(z)$ 的根,满足 $\varphi(z) = -\lambda(z - z_1)(z - z_2)$, 因为 $\varphi(0) = -\mu_1 < 0$, $\varphi(1) = \alpha > 0$, $\varphi(z)$ 是连续函数,所以 $z_2 > 1 > z_1 > 0$, $z_1 z_2 = \frac{\mu_1}{\lambda}$, $z_1 + z_2 = \frac{\lambda + \mu_1 + \alpha}{\lambda}$ 。

定义(11)式中 $G_2(z)$ 的系数为 $f(z) = -\frac{\omega(z)\varphi(z) - \alpha\beta z^2}{\xi(1-z)z\varphi(z)}$, 变形得:

$$f(z) = -\frac{\lambda}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi z} + \frac{\beta A}{\xi(z - z_1)} - \frac{\beta B}{\xi(z - z_2)}, \quad (12)$$

其中 $A = \frac{\mu_1 - z_1}{\lambda(z_2 - z_1)}$, $B = \frac{\mu_1 - z_2}{\lambda(z_2 - z_1)}$ 。

根据(12)式,计算 $e^{\int f(z) dz}$, 得:

$$e^{\int f(z) dz} = e^{-\frac{\lambda z}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi} \ln|z - z_1| + \frac{\beta A}{\xi} (z_2 - z)^{-\frac{\beta B}{\xi}}}. \quad (13)$$

在(11)式的两边分别乘以(13)式,整理得:

$$\frac{d}{dz} [k_1(z) G_2(z)] = \left[\frac{\lambda(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z) - \alpha\lambda\theta z^2}{\xi(1-z)(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z)} P_{00} + \frac{\alpha\mu_1 z - \mu_1 \varphi(z)}{\xi(1-z)\varphi(z)} P_{11} \right] k_1(z), \quad z \leq z_1, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dz} [k_2(z) G_2(z)] = \left[\frac{\lambda(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z) - \alpha\lambda\theta z^2}{\xi(1-z)(\lambda - \lambda z + \theta)\varphi(z)} P_{00} + \frac{\alpha\mu_1 z - \mu_1 \varphi(z)}{\xi(1-z)\varphi(z)} P_{11} \right] k_2(z), \quad z > z_1, \quad (15)$$

其中 $k_1(z) = e^{-\frac{\lambda z}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi} \ln(z_1 - z) + \frac{\beta A}{\xi} (z_2 - z)^{-\frac{\beta B}{\xi}}}$, $k_2(z) = e^{-\frac{\lambda z}{\xi} + \frac{\mu_2}{\xi} \ln(z - z_1) + \frac{\beta A}{\xi} (z_2 - z)^{-\frac{\beta B}{\xi}}$ 。

对(14)式从 0 到 $z(z \leq z_1)$ 积分,对(15)式从 z_1 到 z 积分,整理得:

$$G_2(z) = \begin{cases} \frac{\frac{\lambda}{\xi} P_{00} \int_0^z \frac{k_1(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx + \frac{\mu_1 P_{11}}{\xi} \int_0^z \frac{k_1(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx}{k_1(z)}, & z \leq z_1, \\ \frac{\frac{\lambda}{\xi} P_{00} \int_{z_1}^z \frac{k_2(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx + \frac{\mu_1 P_{11}}{\xi} \int_{z_1}^z \frac{k_2(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx}{k_2(z)}, & z > z_1. \end{cases} \quad (16)$$

因此,得到了 $G_2(z)$ 的表达式,只要确定 P_{00} 和 P_{11} 的表达式,根据(10)式可以得到 $G_1(z)$ 。

2.3 平均队长

为求解服务台各状态下的系统平均队长表达式,令 $E(N_0)$, $E(N_1)$ 和 $E(N_2)$ 分别表示服务台在休假状态、正规忙期状态以及工作故障状态下的平均队长。令:

$$S = \int_0^{z_1} \frac{k_1(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx, D = \int_0^{z_1} \frac{k_1(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx,$$

$$U = \int_{z_1}^1 \frac{k_2(x)((\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x) - \alpha\theta x^2)}{(1-x)(\lambda - \lambda x + \theta)\varphi(x)} dx, V = \int_{z_1}^1 \frac{k_2(x)(\alpha x - \varphi(x))}{(1-x)\varphi(x)} dx.$$

对于(16)式的第一个方程,令 $z \rightarrow z_1$ 时,分母趋近于 0,根据 L'Hospital 法则,分子必趋近于 0,则:

$$P_{00} = -\frac{\mu_1 D}{\lambda S} P_{11}. \quad (17)$$

令 $z=1$ 时,

$$G_2(1) = \frac{\frac{\lambda}{\xi} P_{00} U + \frac{\mu_1}{\xi} P_{11} V}{k_2(1)}. \quad (18)$$

在(7),(8)式中,令 $z=1$,以及 $G_0(1)+G_1(1)+G_2(1)=1$,得:

$$G_0(1) = \frac{\lambda + \theta}{\theta} P_{00}, \quad (19)$$

$$G_1(1) = 1 - \frac{\lambda + \theta}{\theta} P_{00} - \frac{\alpha + \mu_1 P_{11} - \left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) P_{00}}{\alpha + \beta},$$

$$G_2(1) = \frac{\alpha + \mu_1 P_{11} - \left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) P_{00}}{\alpha + \beta}. \quad (20)$$

将(20)式代入(18)式,并结合(17)式,得:

$$P_{00} = \frac{\alpha \xi D k_2(1)}{\lambda(DU - SV)(\alpha + \beta) + \left(\left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) D + \lambda S\right) \xi k_2(1)},$$

$$P_{11} = - \frac{\alpha \lambda S \xi k_2(1)}{\mu_1 \lambda(DU - SV)(\alpha + \beta) + \left(\left(\lambda + \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\theta}\right) D + \lambda S\right) \xi \mu_1 k_2(1)}.$$

对(7)式关于 $z=1$ 处求导,得:

$$E(N_0) = G'_0(1) = \frac{\lambda}{\theta} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta}\right) P_{00}. \quad (21)$$

对于(9)式,利用 L'Hospital 法则,得:

$$E(N_2) = G'_2(1) = \frac{1}{\xi + \beta} [\alpha G'_1(1) - (\mu_2 - \lambda) G_2(1)]. \quad (22)$$

对(8)式关于 $z=1$ 处求导,整理得:

$$E(N_1) = G'_1(1) = \frac{1}{\alpha} [\theta G'_0(1) + \beta G'_2(1) - (\mu_1 - \lambda) G_1(1)]. \quad (23)$$

将(23)式代入(22)式,得:

$$E(N_2) = G'_2(1) = \frac{1}{\xi} [\theta G'_0(1) - (\mu_1 - \lambda) G_1(1) - (\mu_2 - \lambda) G_2(1)]. \quad (24)$$

将(24)式代入(23)式,得:

$$E(N_1) = G'_1(1) = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\theta(\beta + \xi)}{\xi} \right) G'_0(1) - \frac{\beta}{\xi} (\mu_2 - \lambda) G_2(1) - \left(\frac{\beta}{\xi} + 1 \right) (\mu_1 - \lambda) G_1(1) \right]. \quad (25)$$

3 性能指标

根据上述分析,得到如下的系统性能指标:

1) 系统的平均队长为 $E(N) = E(N_0) + E(N_1) + E(N_2)$;

2) 系统的平均等待队长为 $E(N_q) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+1,1} + \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+1,2} = E(N_1) + E(N_2) + G_0(1) - 1$;

3) 顾客的平均逗留时间为 $E(W) = \frac{E(N_0) + E(N_1) + E(N_2)}{\lambda}$;

4) 系统的离去率为 $R = \sum_{n=1}^{\infty} \xi n P_{n,2} = \xi E(N_2)$ 。

其中 $G_0(1), E(N_0), E(N_1), E(N_2)$ 的表达式分别见(19),(21),(25)和(24)式。

4 数值分析

根据上述分析得到的系统性能指标,利用数值实验检验系统参数对系统性能指标的影响。在图 2~3 中,假设 $\alpha=0.3, \lambda=0.6, \mu_1=0.7, \mu_2=0.4, \xi=0.3$ 。图 2 描述了系统平均队长 $E(N)$ 与休假率 θ 和修复率 β 之间的关

系。当 β 为定值时, $E(N)$ 随着 θ 的增大而减小, 当 θ 为定值时, $E(N)$ 随着 β 的增大而减小。图 3 描述了系统平均等待队长 $E(N_q)$ 与休假率 θ 和修复率 β 之间的关系, 当 β 为定值时, $E(N_q)$ 随着 θ 的增大而减小, 当 θ 为定值时, $E(N_q)$ 随着 β 的增大而减小。

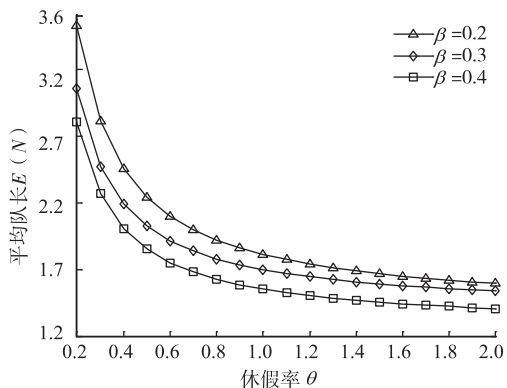


图 2 $E(N)$ 与 θ 和 β 的关系

Fig. 2 Relation of $E(N)$ with θ and β

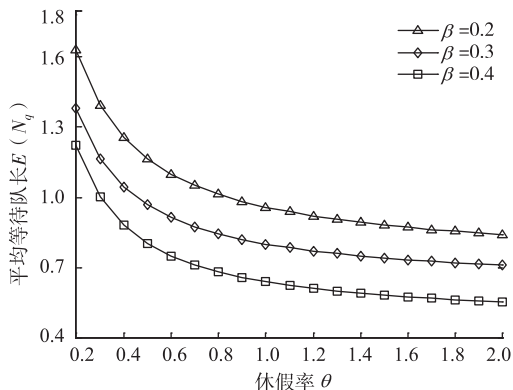


图 3 $E(N_q)$ 与 θ 和 β 的关系

Fig. 3 Relation of $E(N_q)$ with θ and β

在图 4 中, 假设 $\alpha=0.3, \mu_1=0.7, \mu_2=0.5, \beta=0.3, \xi=0.3$ 。图 4 描述了顾客的平均逗留时间 $E(W)$ 与到达率 λ 和休假率 θ 之间的关系, 当 θ 为定值时, $E(W)$ 随着 λ 的增大而增大, 当 λ 为定值时, $E(W)$ 随着 θ 的增大而减小。当 $\lambda > 1.8$, 取不同的 θ 值时, $E(W)$ 值变动较小, 主要原因是顾客的到达率高时, 服务台长时间处于正规忙期或者工作故障期, 休假期很少, 因此 θ 值将不会对 $E(W)$ 值产生明显影响。在图 5 中, 假设 $\alpha=0.3, \lambda=0.6, \mu_1=0.7, \beta=0.4, \theta=0.3$ 。图 5 描述了顾客离去率 R 与不耐烦率 ξ 和服务率 μ_2 之间的关系, 当 μ_2 为定值时, R 随着 ξ 的增大而增大, 当 ξ 为定值时, R 随着 μ_2 的增大而减小。

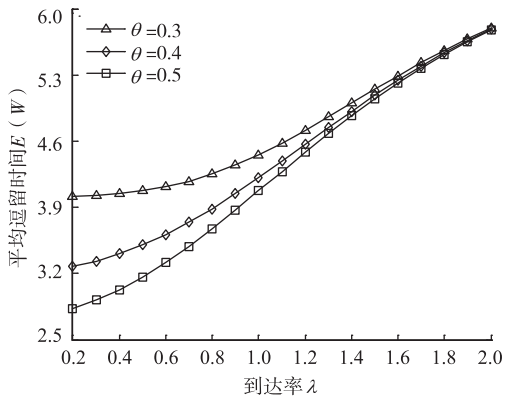


图 4 $E(W)$ 与 λ 和 θ 的关系

Fig. 4 Relation of $E(W)$ with λ and θ

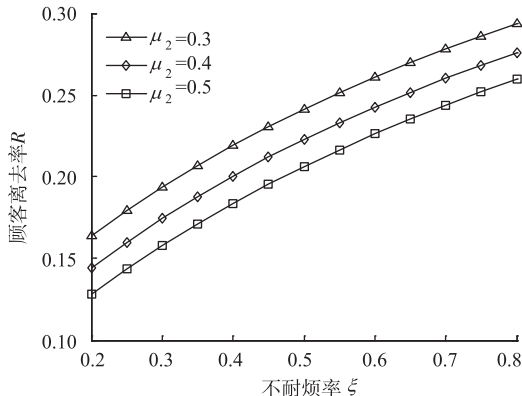


图 5 R 与 ξ 和 μ_2 的关系

Fig. 5 Relation of R with ξ and μ_2

5 均衡策略以及社会最优策略

构建个人以及社会的效用函数, 分析顾客的均衡策略以及社会最优策略。假设 r 表示每个顾客在服务完成后获得的效用, C 表示顾客在逗留过程中的单位等待费用, f 表示每个进队顾客需要支付的入场费用。则顾客的个人效用 U_i 的函数定义为: $U_i = r - CE(W) - f$ 。

假设到达系统的顾客面对完全不可见情形的排队情况, 即顾客既不清楚系统队长又不知道服务台状态。假设 Λ 表示顾客潜在到达率, q^e 表示均衡策略下顾客的进队概率。则顾客的均衡策略为:

$$q^e = \begin{cases} 0, & \text{当 } r < CE(W)_{\lambda=0} + f, \\ \frac{\lambda^e}{\Lambda}, & \text{当 } CE(W)_{\lambda=0} + f \leq r \leq CE(W)_{\lambda=\Lambda} + f, \\ 1, & \text{当 } r > CE(W)_{\lambda=\Lambda} + f. \end{cases}$$

其中 λ^e 是 $U_I=0$ 的解。

在图 6~7 中,参数假设为 $\alpha=0.3, \mu_1=0.7, \mu_2=0.5, \beta=0.3, \xi=0.3, r=50, C=6, f=18$ 。图 6 描述了个人效用 U_I 与到达率 λ 、休假率 θ 的变化情况。对于不同的 θ 值, U_I 随着 λ 的增大而减小, 并且 U_I 均有零点, 那么均衡到达率 λ^e 存在。

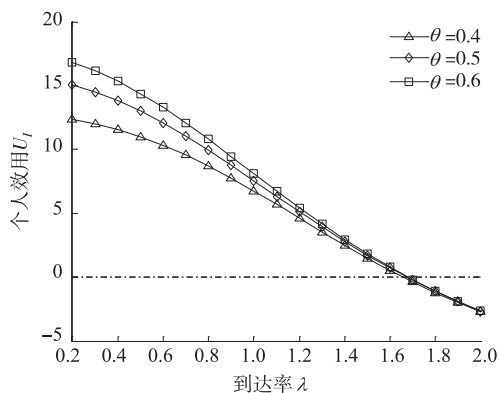


图 6 U_I 与 λ 和 θ 的关系

Fig. 6 Relation of U_I with λ and θ

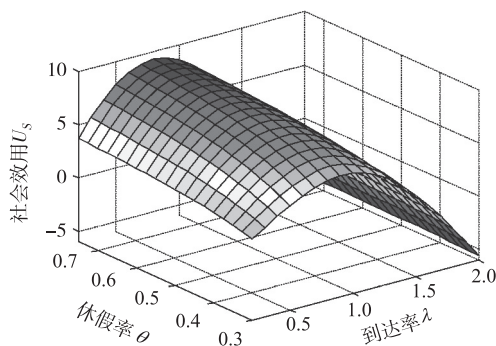


图 7 U_S 与 λ 和 θ 的关系

Fig. 7 Relation of U_S with λ and θ

为了讨论社会最优策略,假设 q^* 是社会最优进队概率, λ^* 为社会最优下的实际到达率, 并且 $\lambda^* = q^* \Lambda$ 。社会效用 U_S 的函数定义为:

$$U_S = \lambda(r - CE(W) - f). \quad (26)$$

利用社会效用函数(26)式,得到 U_S 取最大值的最优到达率 λ^* :

$$\lambda^* = \operatorname{argmax}_{0 \leq \lambda \leq \Lambda} U_S. \quad (27)$$

图 7 描述了社会效用 U_S 与到达率 λ 、休假率 θ 的变化情况。当 θ 取不同值时,随着 λ 的增大, U_S 呈现先增大再减小的变化趋势。因此,社会最优下的实际到达率和社会最大效用值存在。例如,当 $\theta=0.4$, 在 $\lambda^* = 0.8566$ 处, U_S 取最大值为 6.9920。

6 结论

本文在 M/M/1 多重休假排队模型的基础上,结合了不耐烦顾客策略以及工作故障策略,分析了一个新的排队系统。对构建的平衡方程进行详细推导,得到系统稳态队长,逗留时间以及顾客离去率等性能指标,通过数值例子,得到系统参数变化对各个系统性能指标的影响。最后构建效用函数,得到顾客的均衡策略以及社会最优下实际到达率和效用值。

参考文献:

- [1] ALTMAN E, YECHIALI U. Analysis of customers' impatience in queues with server vacations[J]. Queueing Systems, 2006, 52(4): 261-279.
- [2] YUE D Q, YUE W Y, XU G. Analysis of a queueing system with impatient customers and working vacations[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2011, 8(4): 208-212.
- [3] SELVARAJU N, GOSWAMI C. Impatient customers in an M/M/1 queue with single and multiple working vacations [J]. Computers and Industrial Engineering, 2013, 65: 207-215.
- [4] YECHIALI U, PEREL N. Queues with slow servers and impatient customers[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 201: 247-258.
- [5] KALIDASS K, KASTURI R. A queue with working breakdowns[J]. Computers and Industrial Engineering, 2012, 63: 779-783.
- [6] YANG D Y, WU Y Y. Analysis of a finite-capacity system with working breakdowns and retention of impatient customers[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2017, 44: 207-216.
- [7] 王金亭. 排队博弈论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2016. WANG J T. Foundation of queue game theory[M]. Beijing: Science Press, 2016.
- [8] WANG F, WANG J T, ZHANG Z G. Strategic behavior and social optimization in a double-ended queue with gated

policy[J]. Computers and Industrial Engineering, 2017, 114:264-273.

[9] 付馨雨, 罗国旺. 多服务窗等待制 M/M/n 排队模型[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2013, 27(12):139-142.

FU X Y, LUO G W. M/M/n queue model of multi service window waiting system[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science), 2013, 27(12):139-142.

Operations Research and Cybernetics

The Multiple Vacations Queueing System with Impatient Customers and Working Breakdowns

MA Zhanyou¹, CAO Jian¹, YU Xiangran¹, GUO Shanshan¹, CHEN Li²

(1. School of Science, Yanshan University; 2. Liren College, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: [Purposes] In order to expend the random queueing theory, on the basis of the M/M/1 queueing model with multiple vacations, the impatient customers strategy and working breakdowns strategy are introduced. Therefore, a new queueing system is constructed. [Methods] The balance equations of the queueing system in steady state are constructed. The probability generating functions of the number of customers in the system when the server is in different states are derived by using the generating function approach. Furthermore, the explicit expressions of the performance measures are derived in steady state, such as the average queue length and the rate of abandonment of the customers etc. The relation which is between the parameters and performance measures is examined by numerical analysis. According to the game theory, the equilibrium strategy of the customer and the social optimal strategy are analyzed in detail by constructing the utility functions. [Findings] The multiple vacations queueing system with impatient customers and working breakdowns is analyzed. [Conclusions] Service providers and customers take the risk prediction and evaluation decision according to the results in the realistic queue.

Keywords: impatient customers; working breakdowns; multiple vacations; equilibrium strategy; social optimal strategy

(责任编辑 黄颖)

考虑客户满意度的物流公司终端配送线路优化*

范志强, 胡彦勇

(河南理工大学 工商管理学院, 河南 焦作 454000)

摘要:【目的】针对物流公司终端配送线路优化问题,考虑客户满意度以及退货情况对配送方案的影响,力图优化配送线路,提高客户满意度。【方法】分析不同客户(收货、发货、退货)的特点,建立了基于软时间窗的顾客满意度函数,并构建了以配送总成本最低为目标的混合整数规划模型,进一步根据终端配送问题的特征设计了求解模型的模拟退火算法,最后通过 Matlab 软件和具体算例,进行模拟计算。【结果】通过比较有无考虑客户服务时间的两种情况的求解结果,验证了该算法的有效性和实用性。【结论】考虑终端配送过程中客户满意度以及退货情况的发生,可以减少配送成本、节约配送时间、提高客户满意度,极大地提高物流公司竞争力。

关键词:线路优化;时间窗;顾客满意度;模拟退火

中图分类号:O224;F252

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)04-0014-08

物流属于服务型行业,客户满意度不容忽视,作为物流环节末端的终端配送是与客户连接最密切的环节,将对客户进行面对面服务,此时客户满意度显得尤为重要^[1]。在物流终端配送中影响顾客满意度最重要的因素是时效性。因此提高终端配送时效性,进行路径优化是物流配送管理者必须要解决的重要问题。为提高配送时效性,路径优化问题引起了人们的广泛关注。近几年,大量学者对该问题进行了研究。车辆路径问题(Vehicle routing problem, VRP)最早是由 Dantzig 等人^[2]在 1959 年提出的。在已有的研究中,翟劲松等人^[3]考虑时间窗约束,在充分满足顾客的需求下,建立了以配送时间最短为目标的外卖配送路径优化模型,利用遗传算法进行路径优化;蒋国清等人^[4]结合遗传算法与蚁群算法的不同优势,设计了一种两阶段式方法对路径问题进行优化;Cheng 等人^[5]以路径成本和期望路径延迟惩罚总和最小化为目标,采用分布稳健方法进行路径优化;徐丽群等人^[6]以满足顾客时效要求为首要目标,运输距离成本为次要目标,采用图解优化方法对物流配送线路进行优化;Ning 等人^[7]对遗传算法进行改进,设计了一种新的强化信息素更新机制,利用动态信息进行路径优化;Groß 等人^[8]将替代路径与间隔旅行时间(Interval travel time, ITT)进行合并,在旅行时间不同的情况下,使得替代路径可以在效率和可靠性之间进行权衡时选择更好的路径,以优化城市配送路径;Rostami 等人^[9]建立了一个混合整数规划模型,并设计了一个有效精确的分支定界算法,以成本最小为目标,进行路径优化;张培等人^[10]分别利用节约法与遗传算法对鲜奶配送路径进行优化,并验证了遗传算法适用度更高;Yu 等人^[11]考虑区域分布点的路线长度和路况(斜坡和拥堵度)对基于蚁群算法的物流终端配送路径优化进行了 Matlab 仿真,验证了该方法的科学性和可行性;蔡延光等人^[12]提出了一种混沌烟花算法,以油耗最小、距离最短为目标,进行物流配送优化。

现有研究取得了很大的进展和研究成果,理论基础逐渐成熟,但现有的研究忽略了配送过程中的退货情况,退货会对顾客满意度及车载容量都会产生影响。因此,本文基于现有研究中均未同时考虑顾客满意度与退货情况,首先分析刻画不同类型客户的满意度函数,建立了考虑退货情况的终端配送多目标规划模型,最后通过具体算例验证了所建模型的有效性,并对求解结果进行了分析。本研究的结果对物流公司提高客户满意度、减少物流成本都具有十分重要的意义。

* 收稿日期:2018-12-17 修回日期:2019-01-14 网络出版时间:2019-07-15 12:30

资助项目:国家自然科学基金(No. 71502050);河南省哲学社会科学规划项目(No. 2018BJJ023);河南省政府决策研究招标课题(No. 2018B017)

第一作者简介:范志强,男,讲师,博士,研究方向为物流系统运作优化,E-mail:1358508328@qq.com;通信作者:胡彦勇,男,E-mail:211713020004@home.hpu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1229.002.html>

1 基于软时间窗的顾客满意度描述

影响顾客满意度的因素有很多,包括客户期望货物送达时间、期望取货时间、产品质量、产品价格、售后服务等。本文主要研究基于软时间窗约束下的配送时效对客户满意度的影响,利用惩罚函数对客户满意度进行度量^[13-14]。

1.1 收货客户满意度度量

收货客户满意度见图 1。从图 1 可以看出,配送员最早到达收货客户的时刻为 a ,最晚到达时刻为 b 。客户期望配送员到达时刻为 $[t_1, t_2]$,此时段顾客满意度为满分,惩罚系数为 0。配送员实际到达时刻记为 t' ,当 $a \leq t' < t_1$ 时,说明此时配送员提前到达客户点,此时需要等待客户取货,造成了机会成本浪费,用 η_1 表示惩罚系数,进行惩罚;当 $t_2 < t' \leq b$ 时,说明配送员延迟到达客户点,此时造成顾客满意度下降,用 η_2 代表惩罚系数,进行惩罚。惩罚函数 F_1 为:

$$F_1 = \begin{cases} \eta_1(t_1 - t'), & a \leq t' < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t' \leq t_2, \\ \eta_2(t' - t_2), & t_2 < t' \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

1.2 发货客户满意度度量

发货客户满意度度量见图 2。从图 2 可以看出,配送员最早到达收货客户的时刻为 a ,最晚到达时刻为 t_2 ,客户期望配送员到达时刻为 $[t_1, t_2]$,此时段顾客满意度为满分,惩罚系数为 0。配送员实际到达时刻记为 t' ,当 $a \leq t' < t_1$ 时,配送员将等待客户发货,造成机会成本损失,此时惩罚系数为 η_3 ;当 $t_2 < t'$ 时,由于配送员的迟到,发货客户将选择别的物流公司进行发货,造成客户流失,此时的惩罚函数为这单货的配送利润 p 。惩罚函数 F_2 为:

$$F_2 = \begin{cases} \eta_3(t_1 - t'), & a \leq t' < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t' \leq t_2, \\ p, & t_2 < t'. \end{cases} \quad (2)$$

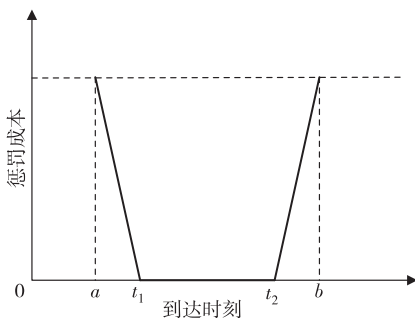


图 1 收货客户满意度度量

Fig. 1 Receiving customer satisfaction measure

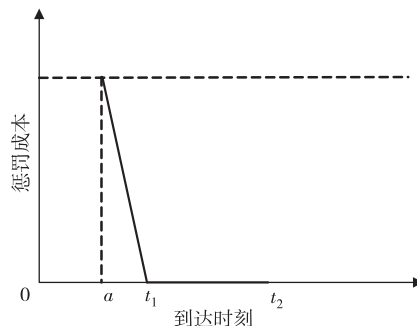


图 2 发货客户满意度度量

Fig. 2 Delivery Customer Satisfaction Measurement

1.3 退货客户满意度度量

本文中的退货客户产生于收货客户中,收货客户在验收货物时,因货物质量、包装破损、串货等原因,对部分或全部货物进行退货。由于本文主要研究配送时效对客户满意度的影响,故退货客户惩罚系数为 0。

2 终端配送成本模型

假设条件:1) 单一配送中心且配送节点数已知;2) 配送车辆车型为 1 种,车容量与载重量已知;3) 1 辆车只能配送 1 条线路;4) 每一顾客点只能访问 1 次;5) 所有配送车辆均从配送中心出发,配送完成后必须回到配送中心;6) 配送车辆单位距离行驶所耗时间与成本,均已知且固定,不考虑道路状况、拥挤程度、红灯数量等情况;7) 不考虑配送中心的存储限制。终端配送模型见图 3。

2.1 模型参数

本文所用到的模型参数设置如下。 W 为终端配送总成本; O 为配送中心编号; V 为配送车辆编号; n 为客户

数量,其中包括收货客户、发货客户以及在收货验收过程中产生的退货客户; i, j 为节点编号,配送中心或配送线路上的 1 位客户都视为配送线路上的 1 个节点; d_{ij} 为节点 i 与节点 j 之间的距离; c_{ij} 为节点 i 与节点 j 之间的单位距离运输成本; c' 为配送车辆进行客户服务的固定成本(包括司机工资、车辆损耗等); s_i 为第 i ($i \in N$) 个客户的收货量; f_i 为第 i ($i \in N$) 个客户的发货量; e_i 为第 i ($i \in N$) 个客户的退货量; S 为配送中心要配送的货物总量; F 为配送中心收到的货物总量,包括顾客的发货数量和退货数量; Z 为车辆的最大载重量; M 为车辆的最大容量; p_o 为配送车辆平均工作量; p_v 为第 v 辆车的工作量; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 分别表示配送距离权值、配送货物量权值、配送节点数权值,且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$; δ_{iv} 为第 v 辆配送车在节点 i 完成客户服务(包括送取货)时的车载重量; ξ_{iv} 为第 v 辆配送车在节点 i 完成客户服务时的车载容量;

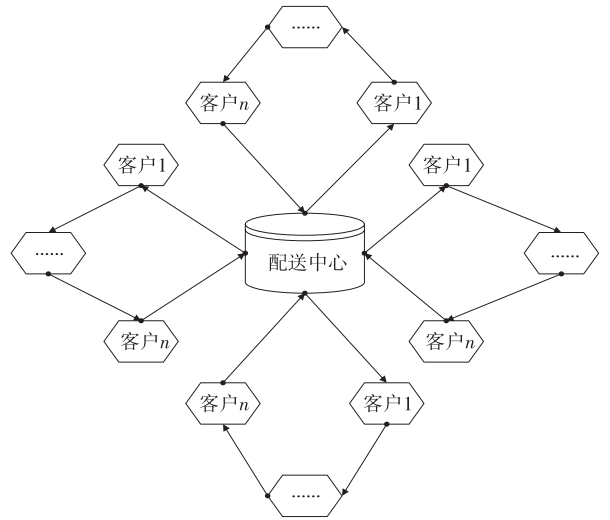


图 3 终端配送结构示意图

Fig. 3 Schematic diagram of terminal distribution structure

N 为顾客集合; O 为配送中心集合; V 为配送车辆集合; $x_{ijv} = \begin{cases} 1, \text{节点 } i \text{ 到节点 } j \text{ 由第 } v \text{ 辆车配送} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$; $y_{iv} = \begin{cases} 1, \text{节点 } i \text{ 由第 } v \text{ 辆车配送} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ 。

2.2 模型构建

多目标终端配送线路优化问题可以建模如下:

$$\min W_1 = \sum_{k \in K} \sum_{i, j \in o \cup N} d_{ij} c_{ij} x_{ijk}, \quad (3)$$

$$\min W_2 = c' \sum_{i \in N} \sum_{v \in V} \max y_{iv}, \quad (4)$$

$$\min W_3 = F_1, \quad (5)$$

$$\min W_4 = F_2. \quad (6)$$

(3) 式为最小化总运输成本;(4) 式为最小化总固定成本;(5) 式为最小化收货客户满意度惩罚费用,使(6) 式为最小化发货客户满意度惩罚费用。显然,各优化目标之间存在效益背反。在实际生活中,不同物流公司对运输成本、固定成本、收货客户满意度与发货客户满意度的注重程度及侧重点不同。故本文通过经典的多目标加权方法,将上述目标转化为如下目标:

$$\min W = \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2 + \beta_3 W_3 + \beta_4 W_4. \quad (7)$$

(7) 式为总目标函数,表示终端配送总成本最低。其中,对运输成本、固定成本、收货客户满意度惩罚费、发货客户满意度惩罚费分别设置 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 这 4 个权重系数,且 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$ 。

约束条件:

$$\sum_{v \in V} \sum_{i, j \in o \cup N} x_{ijv} = 1, i \neq j, \quad (8)$$

$$\sum_{j \in o \cup N} x_{ijv} = y_{iv}, \forall i \in o \cup N, \forall v \in V, i \neq j, \quad (9)$$

$$\delta_{ik} \leq Z \times \sum_{j \in o \cup N} x_{ijv}, \forall i \in o \cup N, v \in V, i \neq j, \quad (10)$$

$$\xi_{ik} \leq M \times \sum_{j \in o \cup N} x_{ijv}, \forall i \in o \cup N, v \in V, i \neq j, \quad (11)$$

$$p_v = \lambda_1 \times \sum_{i \cup j \in o \cup N} \sum_{v \in V} d_{ij} \times x_{ijv} + \lambda_2 \times \sum_{i \in o \cup N} (s_i + f_i + e_i) \sum_{i \in o \cup N} \sum_{v \in V} y_{iv} + \lambda_3 \times \sum_{i \cup j \in o \cup N} \sum_{v \in V} y_{iv}, \quad (12)$$

$$|p_o - p_v| \leq \varphi, \quad (13)$$

$$S = \sum_{i \in N} s_i, \quad (14)$$

$$F = \sum_{i \in N} (f_i + e_i), \tag{15}$$

$$\sum_{i \in N} e_i \leq \sum_{i \in N} s_i, \tag{16}$$

$$s_i, f_i, e_i \geq 0, S, F \geq 0, \tag{17}$$

$$Z, M \geq 0, \delta_{iv}, \xi_{iv} \geq 0, \tag{18}$$

$$x_{ijv}, y_{iv} \in \{0, 1\}, \forall i, j, v, \tag{19}$$

(8)式表示每个客户节点只能由一辆配送车辆进行服务,次数只能为 1;(9)式限制 1 个客户只能被 1 辆车访问 1 次;(10)式表示配送车辆的在任意客户节点的载重量不能超过最大载重限制;(11)式表示配送车辆在任意客户节点的车载容量不能超过配送车的最大容量;(12)式是配送车辆工作量的计算,为行驶距离、送取货物量、服务客户节点数三者的不同权重之和;(13)式是由于工作量均衡与最短线路在实际操作中有时会出现两者冲突,所以为避免过度追求工作量均衡而导致配送线路总里程增加,甚至配送线路数目增加,配送成本上升,故设置允许均衡调整误差 φ , φ 的具体数值可由配送公司根据实际情况设置,本文设置为 $p_0 \times 25\%$;(14)式表示配送中心的配送总量等于所有服务客户节点的收货总量;(15)式表示配送中心的取货总量等于服务客户节点的发货退货量之和;(16)式表示每个收货客户节点的退货量不大于它的应收获量,说明是部分或全部退货;(17)式表示收货量、发货量、退货量、配送总量、收货总量均为非负值;(18)式表示车载重量、车载容量均为非负值;(19)式限定其为 0-1 变量。

3 算法求解

由(3),(8),(9),(19)式可以看出,该模型的一部分属于哈密顿回路问题(Hamiltonian circuit problem, HCP)。由于哈密顿回路问题已被证明属于 NP 完全问题,因此本文模型也属于 NP 完全问题。

性质 1 多目标配送路线问题是 NP 完全问题,因为单目标配送路线问题属于 NP 完全问题。

证明 求解多目标配送路线问题就是要寻找它所有的局部最优解,而单目标配送路线问题的最优解也包含在这些局部最优解中。如果多目标配送路线问题存在多项式时间的最优算法,则单目标配送路线问题也是多项式时间可解的。这与已知条件矛盾,性质得证。 证毕

模拟退火算法思想是由 Kirkpatrick 在 20 世纪 80 年代提出的,该算法思想是模仿自然界中的固体退火过程而得到的。模拟退火算法擅长求解组合优化问题,是求解 NP 难问题的重要方法之一^[15]。针对本文中的模型及实例,设计了一种模拟退火算法进行配送路径优化,流程如图 4 所示。以此求得最优解,得到最小配送成本。

算法的具体步骤如下。

- 1) 选择初始温度 T_0 , 终止温度 T_j , 任选初始解, $i \in S$, 令迭代指标 $k=0, T_k = T_0$;
- 2) 随机产生一个邻域解, $j \in N(i)$, ($N(i)$ 表示 i 的邻域) 计算目标增值 $\Delta f = f(j) - f(i)$;
- 3) 若 $\Delta f < 0$, 令 $i=j$, 转下一步 4); 否则产生 $\xi \in (0, 1)$, 若 $\exp(-\Delta f/T_k) > \xi$, 则令 $i=j$;
- 4) 若达到热平衡(内循环次数大于 $n(T_k)$) 转下一步 5), 否则转到 2);

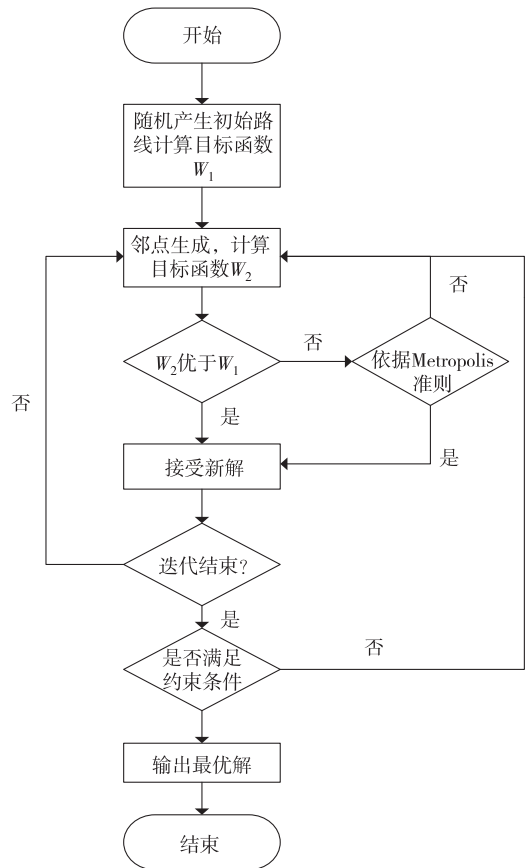


图 4 改进模拟退火算法流程图

Fig. 4 Flow chart of improved simulated annealing algorithm

5) $k=k+1$ 降低 T , 若 $T_k < T_f$ 则停止, 否则转到步骤 2)。

4 应用实例

某物流配送中心某辆配送车在当天 8:00—17:00 时间段内对 10 个客户进行服务(包括 8 个收货客户, 2 个发货客户, 退货客户产生于 8 个收货客户中, 根据实际配送情况进行确定)。根据表 1 所示, 客户 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 为收货客户, 编号 9, 10 为发货客户。为方便计算, 根据历史数据, 假设退货客户有一个, 当天配送货物均为重货, 故以货物重量为车载标准, 最大车载量为 5 t。单位距离运输费用 c_{ij} 为 3 元 \cdot km $^{-1}$, 配送车辆进行客户服务的固定成本 c' 为 100 元, 顾客满意度惩罚系数设为 $\eta_1 = \eta_3 = 1, \eta_2 = 2$, 权重系数设为 $\beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.3$, 配送员在 12:00—13:30 时间段之间可结合实际情况有 30 min 用餐时间, 物流中心及客户点分布如图 5 所示。

配送中心及客户点具体经纬度位置、期望服务时间如表 1 所示。



图 5 配送中心及客户点分布图

Fig. 5 Distribution center and customer point distribution map

表 1 各节点经纬度及时间窗

Tab. 1 Latitude and longitude and time windows of each node

标号	节点	经度/(°)	纬度/(°)	服务时间		标号	节点	经度/(°)	纬度/(°)	服务时间	
				最早	最晚					最早	最晚
0	配送中心	113.238 412	35.248 507	8:00	17:00	6	群英新村	113.264 132	35.257 862	9:00	12:00
1	远华府邸	113.268 850	35.225 021	9:30	14:00	7	后樊巷	113.290 897	35.247 294	9:00	13:00
2	兴隆超市	113.261 253	35.237 632	9:00	15:00	8	怡景园小区	113.276 099	35.237 129	8:30	12:30
3	红太阳公寓	113.215 910	35.244 163	14:30	15:40	9	焦作物资城	113.247 768	35.240 619	15:30	16:00
4	西于村	113.240 308	35.224 141	9:30	14:00	10	焦煤集团	113.249 449	35.249 928	13:00	15:30
5	明明超市	113.265 644	35.252 645	10:00	12:00						

为方便计算,根据经纬度将各节点转化为横纵坐标及各节点的货物量(节点 1~8 为收货量,9,10 为发货量,节点 7 产生退货且全退,即 145 kg。设定每节点的收货、发货时间均为 30 min,退货服务时间为 40 min)如表 2 所示。

表 2 各节点位置及货物量

Tab. 2 Location of each node and quantity of goods

节点	横坐标/km	纵坐标/km	货物量/kg	节点	横坐标/km	纵坐标/km	货物量/kg
0	2.0	2.60	0	6	4.400	3.6	280
1	4.8	0.17	100	7	6.800	2.6	145
2	4.1	1.40	320	8	5.500	1.4	160
3	0	2.20	140	9	2.900	1.8	550
4	2.1	0	260	10	0.085	1.8	280
5	4.5	3.20	650				

配送车辆在各个时间段的行驶速度是不同的,基于焦作市实际情况以及配送车辆的马力,各时间段配送车辆的行驶速度见表 3。

根据上面数据,在不考虑服务时间约束的情况下,利用 Matlab 软件,基于模拟退火算法对此问题的配送线路进行优化,结果见图 6。此时的配送路径为:0—9—2—5—6—7—8—1—4—10—3—0,最短距离为 18.365 5 km。

基于软时间窗约束,考虑客户满意度情况下,利用 Matlab 软件和模拟退火算法求解得到结果见图 7。此时近似最优线路为:0—9—6—5—8—7—1—2—4—10—3—0,最短距离为 19.942 km。

表 3 各时间段的车辆行驶速度

Tab. 3 Vehicle speeds at various time periods

时间段	拥堵程度	行驶速度/(km·h ⁻¹)
8:00—9:00	严重	6
11:30—13:30		
9:00—10:00	一般	10
13:30—15:00		
10:00—11:30	无	15
15:00—17:00		

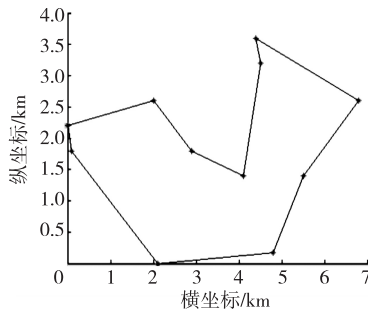


图 6 无时间窗约束的配送线路图

Fig. 6 Distribution route diagram without time window constraints

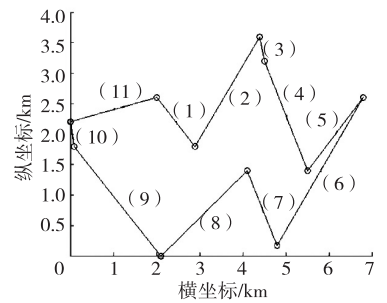


图 7 有时间窗约束的配送线路图

Fig. 7 Distribution line diagram with time window constraint

在不考虑服务时间约束的情况下,最短配送距离为 18.365 5 km,顾客满意度惩罚费用为 31 元,总配送费用为 71.34 元;在考虑服务时间约束的情况下,最短配送距离为 19.942 km,顾客满意度惩罚费用为 5 元,总配送费用为 65.43 元。由表 4 可知,配送方案改进前顾客满意度较低,付出的惩罚费用为 31 元;配送方案改进后的顾客满意度明显提升,付出的惩罚费用降低至 5 元,效果改善率达到 83.87%。

表 4 两种配送方案的效果对比

Tab. 4 Comparison of the effects of the two distribution schemes

改进前的配送方案				改进后的配送方案			
节点	到达时间	离开时间	顾客满意度惩罚费用/元	节点	到达时间	离开时间	顾客满意度惩罚费用/元
9	8:12	8:42	0	9	8:12	8:32	0
2	8:54	9:30	6	6	8:55	9:30	5
5	9:43	10:30	0	5	9:33	10:03	0
6	10:33	11:03	0	8	10:11	10:41	0
7	11:13	11:53	0	7	10:47	11:27	0
8	12:10	12:40	0	1	11:55	12:25	0
1	13:26	13:56	0	2	13:10	13:40	0
4	14:11	14:41	22	4	13:55	14:25	0
10	14:57	15:30	3	10	14:43	15:13	0
3	15:32	16:02	0	3	15:15	15:45	0
0	16:10			0	15:53		
合计			31				5

注:改进前、后的配送方案中配送员用餐时段分别为 12:40—13:10 和 12:25—12:55

由上面两次求解结果可以看出考虑顾客服务时间的配送线路比未考虑顾客服务时间的配送线路要长,但配送总费用却比未考虑服务时间约束的配送方案节省了约 6 元,总配送时间也缩短了 17 min,而且顾客满意度得到了大大提高,所带来的长远利益更是对于企业增加营业额提升竞争力有着重大意义。另外,本文模型重在强调客户满意度最大化,这是已有模型没有考虑到的,是针对新问题的新模型。同时,本文算法比传统算法求解速度更快,如文献[9]的分支定界算法。分支定界算法属于精确算法,随着算例规模的增加,需要的求解算法必然越来越长,而模拟退火算法可以在较短的时间内,取得效果不错的满意解,达到了本文要研究的目的。

5 结论

随着人们的选择范围越来越广,人们越来越注重用户体验,提高顾客满意度,对物流公司尤为重要。本文研究了含有退货情况的物流配送路径优化问题,考虑有无服务时间约束两种情况,建立了基于客户满意度的配送总成本最低模型,并验证了多目标配送路线问题是 NP 完全问题,然后结合启发式规则引入软时间窗约束设计了一种模拟退火算法,最后进行算例验证。算例分析结果显示,考虑顾客服务时间约束的配送方案优于未考虑服务时间约束的配送方案,该算法可以满足顾客对配送时间的要求,从而大大提高顾客满意度,提升物流中心竞争力。但文中未考虑多车型以及配载货物之间的互斥性,未来的研究方向将基于此,通过对配送货物分类来减少混载造成的货物积压、串味、磨损等问题,从而提高顾客满意度。

参考文献:

- [1] 彭岩,刘另.基于个性化需求的物流服务供应链初探[J].重庆理工大学学报(自然科学),2016,30(11):162-166.
PENG Y, LIU L. Research on individual demand-oriented logistics service supply chain[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2016, 30(11): 162-166.
- [2] DANTZIG G B, RAMSER J H. The truck dispatching problem[J]. Management Science, 1959, 6(1): 80-91.
- [3] 翟劲松,台玉红.基于时间窗约束下的外卖配送路径优化[J].物流科技,2018,41(3):15-18.
ZHAI J S, TAI Y H. Delivery routing optimization based on time window constraint[J]. Logistics Sci-Tech, 2018, 41(3): 15-18.
- [4] 蒋国清,潘勇,胡飞跃.两阶段式的物流配送路径优化方法[J].计算机工程与应用,2015,51(2):255-258.
JIANG G Q, PAN Y, HU F Y. Research on logistics route based on genetic algorithm and ant colony optimization algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2015, 51(2): 255-258.
- [5] CHENG J Q, LEUNG J, LISSER A. New reformulations of distributionally robust shortest path problem[J]. Computers & Operations Research, 2016, 74(10): 196-204.
- [6] 徐丽群,候立文,胡巍.基于 GIS 的物流配送线路图解优化模型[J].工业工程与管理,2007(4):25-28.
XU L Q, HOU L W, HU W. A Diagrammatizing optimal model of vehicle routing based on GIS[J]. Industrial Engineering and Management, 2007(4): 25-28.
- [7] NING J X, ZHANG Q, ZHANG C S, et al. A best-path-updating information-guided ant colony optimization algorithm[J]. Information Sciences, 2018, 433/434: 142-162.
- [8] GROB P O, EHMKE J F, HAAS I, et al. Evaluation of alternative paths for reliable routing in city logistics [J]. Transportation Research Procedia, 2017, 27: 1195-1202.
- [9] ROSTAM I B, CHASSEIN A, HOP F M, et al. The quadratic shortest path problem: complexity, approximability, and solution methods [J]. European Journal of Operational Research, 2018, 268(2): 473-485.
- [10] 张培,武忠.基于遗传算法的鲜奶冷链物流配送路径优化[J].市场周刊(理论研究),2018(3):15-17.
ZHANG P, WU Z. Routing optimization of fresh milk cold chain logistics distribution based on genetic algorithm [J]. Market Weekly (Academic Research), 2018(3): 15-17.
- [11] YU M, YUE G J, LU Z C, et al. Logistics terminal distribution mode and path optimization based on ant colony algorithm [J]. Wireless Personal Communications, 2018, 102(4): 2969-2985.
- [12] 蔡延光,戚远航,蔡颖,等.物流运输调度问题的混沌烟花算法:基于多车型供应链[J].计算机工程与应用,2019,55(3):238-244.
CAI Y G, QI Y H, CAI H, et al. Chaotic fireworks algorithm for multi-type vehicle routing problem in supply chain [J]. Computer Engineering and Applications, 2019, 55(3): 238-244.
- [13] 孙尧.基于双满意度的电商自营物流末端配送 VRP 模型及应用[D].北京:北京交通大学,2017.
SUN Y. Vehicle routing problem model and application of electric business enterprise terminal self-logistics distribution based on double-satisfaction [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2017.
- [14] 范志强.供应链订单分配优化模型及其模拟退火算法[J].计算机工程与应用,2012,48(25):28-33.
FAN Z Q. Simulated annealing algorithm to supply chain

order allocation problem[J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(25): 28-33.

- [15] 邓学平, 周昔敏, 田帅辉. B2C 电子商务物流中心选址-路径综合优化研究[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2016, 28(4): 593-600.

DENG X P, ZHOU X M, TIAN S H. Research on integrated optimization of location and routing for B2C E-commerce logistics center[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2016, 28(4): 593-600.

Operations Research and Cybernetics

Logistics Company Terminal Distribution Line Optimization Considering Customer Satisfaction

FAN Zhiqiang, HU Yanyong

(School of Business Administration, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454000, China)

Abstract: [Purposes] In order to optimize the distribution route of logistics companies, consider the impact of customer satisfaction and return on the distribution plan, and strive to optimize the distribution line and improve customer satisfaction. [Methods] The characteristics of different customers (receipt, delivery, return) were analyzed, and the customer satisfaction function based on soft time window was established. The mixed integer programming model with the lowest total cost of distribution was constructed, and further distributed according to the terminal. The characteristics of the problem are designed by the simulated annealing algorithm for solving the model. Finally, the simulation calculation is carried out by Matlab software and specific examples. [Findings] The validity and practicability of the proposed algorithm were verified by comparing the results of two cases with or without customer service time. [Conclusions] Considering the customer satisfaction and the return situation in the terminal distribution process, it can reduce the distribution cost, save the delivery time, improve the customer satisfaction, and greatly improve the competitiveness of the logistics company.

Keywords: path optimization; time window; customer satisfaction; simulated annealing

(责任编辑 黄 颖)

基于图论的预约-分配的模型和算法研究*

李斌¹, 李群², 刘亦萍¹

(1. 上海第二工业大学 计算机与信息工程学院, 上海 201209; 2. 上海市第一人民医院, 上海 200080)

摘要:【目的】随着日间手术病房的就医人数的快速增加, 针对患者的预约分配要求, 医院的处理过程正变得越来越困难和复杂。传统方法通过人工填表进行预约分配, 耗时长、效率低, 并分散了对医疗方案的注意力, 所以迫切需要新的计算技术来解决预约分配中存在的问题。【方法】采用网络和图论的方法, 将患者和日间手术病房之间的预约分配问题, 合理表示为一种患者和病床之间的资源优化管理。即把患者和病床之间对应关系, 构成二部图(Bipartite-graph)的模型和算法。【结果】采用了改进的算法后, 通过在计算机上对数据进行仿真模拟, 表明基于该模型和算法基础上给出的排序结果优化了的预约分配方法。【结论】采用二部图模型和改进算法, 有效解决目前在日间手术病房的预约分配中存在的困难问题, 优化了医疗资源管理。

关键词:网络; 图论; 算法; 仿真; 群体; 日间手术资源管理

中图分类号: O157.6

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)04-0022-09

1 研究背景

把有限的优质医疗资源进行有效合理的分配使用, 是现代医疗管理中需要解决的实际问题。许多学者、医疗机构对此进行了系统性研究并用于实践。例如, 上海市第一人民医院的日间手术(Ambulatory surgery 或 Day surgery)管理流程就是针对常规住院手术流程的资源进行优化管理。日间手术的概念是 Nicoll 医生在 1909 年首次提出^[1]。国际日间手术协会(International association for ambulatory surgery, IAAS)于 2003 年提议将日间手术定义为^[2]: 患者入院、手术和出院在 1 个工作日内中完成的手术(除在医师诊所或医院开展的门诊手术外)。中国日间手术合作联盟于 2015 年在第三届全国日间手术学术年会上发布了关于日间手术的定义^[1]: 指患者在一日(24 h)内入、出院完成的手术或操作。中国的日间手术起始于 20 世纪 90 年代。上海申康医院发展中心于 2014 年提出适用于上海市级医院日间手术的定义, 即: 患者入院、手术和出院在 24~48 h 内完成的手术或操作, 但不包括急诊手术和门诊手术。

日间手术患者的就医行为中, 有一类是涉及到预约与分配(Appointment-allocation)问题^[3], 即在日间手术流程的初始阶段: 患者预约入院的时间安排。目前医院日间手术的预约与分配管理过程中, 由于医院和患者可能存在时空差异, 需要医院工作人员与患者就后者预约入院时间进行联系、确认。这个过程中缺乏量化依据, 由手工加经验完成预约。当患者临时有变向院方提出变更预约日期时, 就需要重复上述过程。这样不仅导致医护人员的操作繁琐, 流程变长, 工作效率低, 而且容易影响医护人员的对医疗方案的注意力。随着医疗技术的快速发展, 日间手术逐渐增多, 原来的手工管理方法已严重影响了管理效率。因此, 用计算机技术和数学模型解决日间手术管理过程中的预约分配问题也由此产生。但已有的研究在讨论患者和医院之间的一些复杂行为规律时, 都考虑希望能将复杂行为能描述成为一种数据格式的表达形式, 以便直接用标准的数学公式进行计算, 再对数值结果进行各种定性和定量化的分析。而在实际医疗情况中, 这是一件比较困难的工作。还有学者讨论使用一

* 收稿日期: 2018-09-13 修回日期: 2019-06-30 网络出版时间: 2019-07-15 12:30

资助项目: 国家自然科学基金重点国际(地区)合作研究(No. 71520107003); 上海市松江区科学技术攻关项目(No. 16SJGG22); 上海第二工业大学重点学科项目(No. XXKZD1604)

第一作者简介: 李斌, 男, 高级工程师, 研究方向为计算机科学与技术, E-mail: libin@sspu.edu.cn; 通信作者: 李群, 女, 副主任医师, E-mail: qunli70@126.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1229.008.html>

种简单的匹配优化模型,即当群体和资源在数量上相等时,如何满足群体的第一选择的情况。但通常在医院日间手术安排管理过程中,患者人数和医疗资源不对等。因此,这类研究成果与实际情况有差异。

随着网络与图论、人工智能、计算机等学科的发展,用新的研究方法对患者人群间的复杂行为进行数值化、可视化、智能化的工作也在更深入地演化,由此吸引了更多的关注^[3-4]。本文以上海市第一人民医院南院为例,运用图论、网络模型和算法等方法,将患者和医护人员的关系看成是网络和群体关系,通过对日间手术流程中的患者实际就医行为的模拟模型和算法分析设计,解决医患双方在预约与分配过程中的管理效率问题。该院日间手术服务中心采用“集中管理”模式来建立,将涉及多个医学分科的病人集中至日间医疗部,统一进行院前服务、收治住院、手术安排、术后护理及随访的一体化无缝式管理。日间医疗部作为日间手术院前、院内及出院服务综合一体化枢纽,起到了规范、统筹、协调的作用。这个工作具有重要的实际应用意义。Matlab的数值模拟仿真结果表明,本文所提出的模型和算法是一种能高效地实现预约与分配过程的可行方法。

2 预约安排的管理优化方法

数学与计算机科学、图论与网络等基本理论和技术,提供了研究医院系统与患者群体之间的相互关系的一些基本方法。将患者和医院分别看成是两种类型的集合,即可以采用二部图(Bipartite-graph)的模型方法,通过合理的算法,模拟实现日间手术资源管理的过程^[5-6]。对这类预约安排的资源管理的问题做进一步深入分析,事实上就是如何有效合理安排患者预约进入日间病房手术,将患者看成用户类的集合,病床看成目标类的集合。由于手工安排中更多是凭着经验感觉,缺乏量化值表示,因此基于该模型上的计算机算法实现,解决了量化值和自动化问题,系统自动对数值排序,给出的患者和病床的对应关系,效率提高可以看成是管理过程中的优化^[7-9]。

进入日间手术管理流程的前提是患者需要符合手术指征且通过手术医生和麻醉医生的评估。在用人工神经网络和机器学习方法先对医院数据库中的已有的先验数据进行训练学习,然后对这些患者的医学测试参数的某些指标进行处理,得出手术指征相似度的初始值。由计算机程序对手术类型和患者对应关系进行映射解析,送入该模型中用算法计算,将计算的结果按照排序全部列出,由计算机按照量化数值的大小进行安排,自动给出患者的预约-分配结果。在计算机流程中预先设置了不同患者的预约数据池,同一个池中的同一个患者是无法在同一天进行重复预约操作。

本文针对上海市第一人民医院的日间手术资源管理流程,提出了这种具体的预约-分配实现模型,它是对患者和病床之间资源管理有效的方法。这是一种用患者和病床之间关系所构成的二部图的模型表示方法。在该模型和图中,不同的患者顶点和病床顶点之间存在连接关系。由于男性和女性患者住不同区域,所以模型不受患者性别影响,模型顶点间的连接边就表示为预约的患者 p_i 可以被安排在病床 b_j 。

3 网络与图的基础

要想直接运用现成的数学公式,对群体的复杂行为过程进行计算分析,仍然是比较困难的。而采用复杂网络和图论中的一些分析方法,可将复杂行为过程映射到网络和图的结构上,就对复杂行为进行直观的可视化表示,然后通过模型的动力学进行量化计算分析,来理解和分析复杂行为中所蕴含的规律和性质。

采用有限图来描述复杂行为过程时,使用顶点和无方向的边,这时共同构成了一个无向图 $G=G(V,E)$,如果图中总共有 N 个顶点,其中每个顶点可用符号 $i(i=1,2,\dots,N)$ 来区别表示,那么这个无向图就可以用邻接矩阵(Adjacency matrix) $\mathbf{A}=(a_{i,j})$ 的形式来准确表示,其中:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \forall e(i,j) \in E, \\ 0, \text{否则}。 \end{cases} \quad (1)$$

因此,若对这个无向图 $G=G(V,E)$ 进行量化和分析时,就变成了可以使用代数和矩阵一些计算方法来实现^[5,10]。

此外,这个无向图还可用另外一个 $N \times K$ 的关联矩阵(Incidence matrix) $\mathbf{B}=(b_{i,j})$ 来表示,当其中顶点 $i(i=1,2,\dots,N)$ 是与关联的边 $b_k, k \in K$ 相连接时,则该矩阵中的对应项 $b_{i,j}$ 等于 1。而如果顶点没有和边相连接,则该对应项等于 0。矩阵中的对应项 $b_{i,j}$ 为:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, \forall e_k \in E, \\ 0, \text{否则}。 \end{cases} \quad (2)$$

此时,用图的一些基本方法就建立了行为和数据之间的联系。

当这个无向图 $G=G(V,E)$ 中总共有 N 个顶点时,可以对某一个顶点的性质进行分析比较,即可以对某一个顶点处于何种中心程度进行计算,称为度中心性(Degree centrality)。无向图中的顶点 $i(i=1,2,\dots,N)$ 的度中心性度量,可以用顶点 i 的度表示,其实就是一个顶点 $i(i=1,2,\dots,N)$ 连接到其他顶点的边数目。用它表示顶点 i 的重要性。用的符号 k_i 就表示顶点 i 的度:

$$D_i^c = k_i = \sum_{j=1}^N a_{i,j} \quad (3)$$

所以无向图中某一个顶点 i 与其他顶点的连接的边数越多时,该顶点 i 的度就越是处于图中许多顶点的中心,即表示该顶点 i 的中心性更大。还可对于一个无向图中有度的分布(Degree distribution)进行计算。如果网络图中顶点总数为 N ,顶点中有 k 个连接边的顶点数为 N_k ,则它的度的分布用

$$p_k = \frac{N_k}{N} \quad (4)$$

表示。在对无向图中分析图的复杂性(Graph complexity)概念问题时,就是通过关于度的分布来进行描述。

把一个复杂的行为用有 N 个顶点的无向图的方法来表示后,就可评价图的联系效率(Efficiency)。对于一个无向图 $G=G(V,E)$ 中两顶点 i 和 j ,假设 i 和 j 之间联系效率可表示为 $e_{i,j}$,它等于两个顶点之间的距离 $d_{i,j}$ 的倒数,故可表示成为 $e_{i,j} = \frac{1}{d_{i,j}}$ 。如果 i 和 j 两个顶点之间没有连接的边,则用它们的距离表示 $d_{i,j} = \infty$,即两个顶点 i 和 j 之间的联系效率 $e_{i,j}$ 等于 0。那么无向图 $G=G(V,E)$ 的效率:

$$E_f = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{d_{i,j}} \quad (5)$$

就是全部两两顶点 i 和 j 之间的效率 $e_{i,j}$ 的平均,所以如果两个顶点之间的连接距离越短,此时用无向图所表示的顶点间联系效率就越高。该二部图中最大的联系效率为 $E_{\max} = \frac{35}{136}$ 。

4 改进的一种模型与算法

在普通的赋权图(Weighted graph) $G=G(V,E,Z)$ 方法中^[11-13],图中的顶点 V 、连接边 E 和矩阵 $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 都被赋予了权重不等的初始实数值,即 $E \in \mathbf{R}, V \in \mathbf{R}, Z \in \mathbf{R}$ 。在对医院实际情况做分析后,提出了采用了二部图(Bipartite-graph)模型的方法,在二部图中,集合中顶点 V 、集合间连接边 E 的初始值都是相等的单位值 1。

用传统二部图模型研究的是当两个集合中顶点之间的数量相等时完美匹配问题,并采用经典的算法实现完美匹配问题。Bregman 定理表明,当二部图中两个集合中的元素的顶点个数相等 $|V_1| = |V_2| = n$,顶点的度为 $d(v)$ 时, $G=G(V,E)$ 中的完美匹配的计算上界最多为 $\prod_{v \in V_1} (d(v)!)^{\frac{1}{d(v)}}$ 。例如,当集合中的顶点 $n=10$ 时,

$\prod_{v \in V_1} (d(v)!)^{\frac{1}{d(v)}} = (10!)^{\frac{1}{10} \times 10} = (10!)$ 。实际上,如果其中一个集合中包含一个受限组时,则无法实现完美匹配任务。

4.1 模型与算法

近些年来,在许多实际应用中关于以图为基础的网络结构和算法的研究也开始引起了人们的重视。由于医院的主要目的是治病救人,高效地提供优质医疗服务。从一般意义上讲,患者应及时完成实现医治任务,而不是期待有一个所谓的理想病床条件(例如病房朝向、门窗位置、距离电梯或护士台远近等),即完美匹配的出现。所以常规的情况是,一旦收到院方安排好入院时间的通知,患者宜尽量按照预约安排,按时入院。因此根据实际情况和对流程的分析,在改进的二部图模型中,设计了两个集合中的顶点个数不相等的情况,从院方医疗资源使用效率上考虑,为患者人数设计了数据池,预约患者人数通常略大于可用病床的数目,每批的预约患者从数据池取出(图 1)。

在图 1 中,将 N 个患者 p_i 分别用圆圈形状表示, M 个病床 b_j 分别用方块形状表示。每个患者在预约结果出来以前是有多个床位分配的可能性。但计算以后,每个预约成功的患者就只对应 1 个分配床位。没有成功的

患者则跳转到下一批数据池中,重复该过程。这样操作符合目前日间手术管理的流程规则。同时可以看出,在某一个数据池中不同预约患者全体构成了一个群体的集合,可表示为 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_s, \dots, p_t, \dots, p_N\}$, $p_s \neq p_t, s \neq t, s, t \in \{1, \dots, N\}, N \in \mathbf{N}$ 。预约中等待安排的不同空病床,也构成了一个病床群体的集合,可表示为

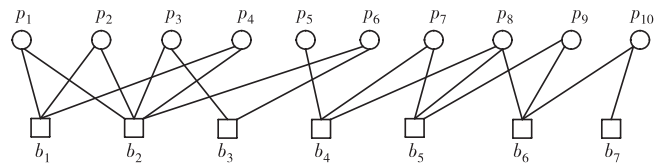


图 1 日间手术病人与病床之间的关系

Fig. 1 Relationship between patients and beds in ambulatory surgery

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_e, \dots, b_f, \dots, b_M\}$, $b_e \neq b_f, e \neq f, e, f \in \{1, \dots, M\}, M \in \mathbf{N}$ 。严格的条件可限制在一个数据池中,避免同一个患者和床位都被重复计算的情况。在患者和病床之间的连接线称为边,仅仅是表示了预约分配实现之前,即在患者-病床对中,存在的可使用病床资源。只有通过模型和算法的计算,得出全部患者的对应分数值,然后按大小进行排序,最后根据排序值,明确分配好某个患者 p_i 对应的一张病床 b_j 后,才表明日间手术资源管理过程中,患者 p_i -病床 b_j 对的预约分配的过程真实完成。

模型中两个集合里的每个顶点的下标,分别用整数 i 和整数 j 表示遍历,集合之间的连线分别代表了患者 p_i 被安排使用病床 b_j 的可能性。对于该二部图 $G(P, B, E)$,其中 E 就是边的集合。患者集合 P 和病床集合 B 之间构成了一个 $N \times M$ 的邻接矩阵 $A = (a_{i,j})_{N \times M}$, $a_{i,j} \in \{0, 1\}$,这个矩阵中的元素就是边,定义为:

$$a_{i,l} = \begin{cases} 1, & p_i b_l \in E, \\ 0, & \text{否则。} \end{cases} \quad (6)$$

假设现在第 i 顶点是患者 p_i 在进行预约,系统将根据日间手术指征参数的分类情况,从医疗数据库中可以获得患者的一个初始值,该值可以是涉及到与患者有关的综合医学检查指标,例如对于血压、体温、心率、手术指征等有关参数的综合评价指标,由编程软件映射解析,见图 2。数据库系统先通过神经网络和机器学习训练后,对包含的日间手术的数据集进行分类,然后在患者数据池给出相应的数值作为初始值。它可以表示为手术指征相似程度的大小。计算机编程是可以对手术指征、类型和患者之间的对应关系进行映射解析。所以患者顶点 p_i 的输入值可以是指征相似度的值,也可以简单用数值 1 代表患者。

根据前面网络算出的邻接矩阵 A ,第一步,首先要计算该图中从集合 P 到集合 B 上的相应顶点的数值,即在第 j 个顶点的 b_j 上的数值 $B(b_j)$,可以表示为:

$$B(b_j) = \sum_{i=1}^N \frac{a_{i,j} f(p_i)}{d(p_i)} = \sum_{i=1}^N \frac{a_{i,j} v_i}{d(p_i)}. \quad (7)$$

其中参数值 $d(p_i)$ 就是顶点 i 的连接边的数目,即患者-病床度,看成医院系统给符合手术指征患者的某种预设分配程度。

第二步,计算集合 B 到集合 P 上的相应数值,即在第 i 个顶点的 p_i 上的数值 $P(p_i)$ 表示为:

$$P(p_i) = \sum_{j=1}^M \frac{a_{j,i} B(b_j)}{D(b_j)} = \sum_{j=1}^M \frac{a_{j,i}}{D(b_j)} \sum_{i=1}^N \frac{a_{i,j} v_i}{d(p_i)}, \quad (8)$$

式中的参数值 $D(b_j)$ 称为病床-患者度,也反映了医院系统对符合日间手术的病床预设的使用程度,即由网络模型所反映。再计算出患者的 $N \times N$ 的分配系数矩阵 $W = (w_{i,j})$ 。可根据邻接矩阵 A 中的项进行计算:

$$w_{i,j} = \frac{\sum_{i,j=1}^N \sum_{k=1}^M a_{i,k} a_{j,k}}{d(p_i) D(b_k)}, i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

式中的 $d(p_i) = \sum_{k=1}^M a_{i,k}, D(b_k) = \sum_{i=1}^N a_{i,k}$ 就是医院系统给符合日间手术指征的患者 p_i 预设定的病床 b_j 的初始度。即由图 1 的拓扑结构确定。分配系数矩阵 $W = (w_{i,j})$ 中算出的列项是归一化的,每列的代数和都等于 1,所以看

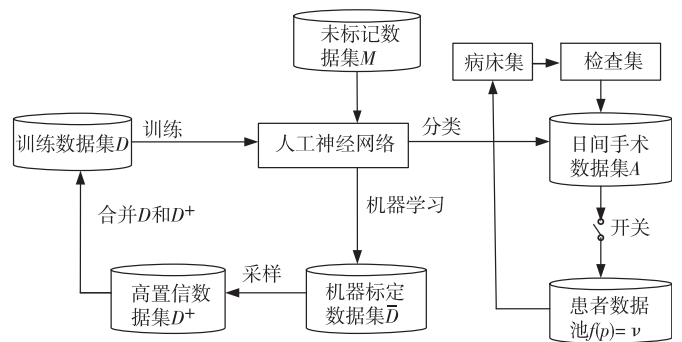


图 2 患者医学检查参数数据库

Fig. 2 Patients medical test parameters database

成分配系数矩阵中的列项的概率和是等于 1。接着,计算出 $N \times N$ 的患者的相似性矩阵 $S = (s_{i,j})$, 患者 p_i 和 p_j 之间的相似值为^[4-5]:

$$s_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^N \omega_{i,k} \omega_{j,k}}{\min\{d(p_i), d(p_j)\}} \quad (10)$$

表 1 患者预约表

Tab. 1 Table of patients with an appointment

病床	患者					
b_1	p_1	p_2	p_4	\emptyset		
b_2	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	\emptyset
b_3	p_3	p_6	\emptyset			
b_4	p_5	p_7	p_8	\emptyset		
b_5	p_7	p_8	p_9	\emptyset		
b_6	p_8	p_9	p_{10}	\emptyset		
b_7	p_{10}	\emptyset				

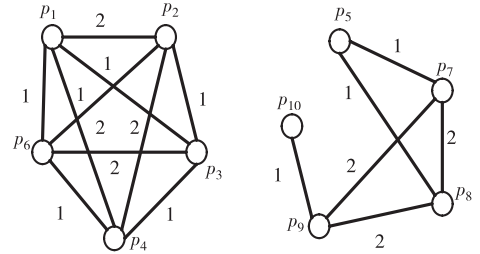


图 3 患者集合 P 的投影

Fig. 3 Projection of patients set P

在预约患者的分配系数矩阵 W 的基础上,可以针对预约患者集合 P 给的初始值,再分别算出一个 $N \times 1$ 的选择分数矩阵 $R = WP$ 。所以通过计算每一个患者 p_i -病床 b_k 预约对中的值,可以用数量值来表示患者 p_i 与病床 b_k 间的一种使用病床安排的排序结果。通过对计算后的分数值分析表明,在列矩阵 R 中算出的数值大小,和医院系统中为数十种日间手术指征的类型设定的顶点度有关。例如,在冬季冰雪时期,骨折、心脑血管类指征出现问题的患者数量比较多,通常比普通眼科类患者要严重一些,医院会对前类患者顶点给予更多的度。顶点的度越大,则中心性越大。而 R 中的值和输入给患者顶点的初始值大小没有直接关系。顶点上初始值大而顶点的度小时,顶点预约中没有分配到床位。而顶点上初始值小但顶点的度大时,顶点预约中分配了床位。医院按实际情况给顶点的度是会影响计算的分数值。

Neiman 和 Solomon 的算法^[14]研究表明,在 $|V| = n, |E| = m$ 的图中,如果通过采用动态的增加或删除连接边的方法,想要实现的完全匹配任务,那么找到确定性完全匹配的算法,则需要计算的更新次数是 $O(\sqrt{m})$ 。

最后用图熵(Graph entropy)作为该模型的图信息内容的度量方法,图熵既是关于图中包含的信息的一种度量,而且也是描述随机事件不确定性的一种度量。如果在图中模型的某个顶点 i 的度为 k_i 时的概率可以表示为 $p_i(k_i)$,那么计算该图的熵为^[15-16]:

$$H = - \sum_{k_i} p_i(k_i) \cdot \log p_i(k_i) = - \sum_{k_i} \left(\frac{k_i}{E}\right) \cdot \log\left(\frac{k_i}{E}\right) \quad (11)$$

对于图 1 模型中顶点的度为 $N_1 = 1, N_2 = 8, N_3 = 1$, 图中的信息熵为 $H = -\frac{1}{20} \log_2\left(\frac{1}{20}\right) - \frac{8}{20} \log_2\left(\frac{8}{20}\right) - \frac{1}{20} \log_2\left(\frac{1}{20}\right) = 0.9610$ 。而如果当图 1 变成完备的二部图时,即图 1 中的每个患者都连接到病床时,由于患者节点的度都是 7,顶点总数量为 $k_i = 10$,此时图 1 的信息熵却为 $H = \left(-\frac{10}{70} \log_2\left(\frac{10}{70}\right)\right) = 0.4011$ 。信息熵的数值较小,表明了信息的不确定性程度较小,或者事件不确定性的程度比较小,这说明反而很少需要做管理的改进工作。而现代管理优化工作目的,正是为了解决系统中不断出现的无序的、不确定性的问题,即熵增加问题^[16-18]。

4.2 算法的适用性条件分析

1) 当患者人数 $N \geq 2$, 病床数 $M = 1$, 此时是多位患者面临只有一张病床的特殊情况。由于矩阵中的元素值可能都相等,根据算计算出的患者的分数值可能是相等的,导致难以分配。显然这时应该由医院根据患者的实际手术指征情况,安排某患者的入院病床。

2) 当患者人数 $N = 1$, 病床数 $M \geq 1$, 此时是一位患者面临多张病床的特殊情况。由于根据算法得出的矩阵是一个值,患者可以使用全部的病床,算出的分数结果都相同。但应该由医院根据实际情况确定患者的床位。

3) 对于不同手术类型的患者,如果算出相同的分数值,并且超出可用的床位数目时,由医院系统根据实际情

况对患者安排进行个别微调。

4) 当 $N > M$ 时,即患者类型人数超过病床数目时,可以将计算出的分数值 $r_{i,k}$,按照从高到低的排序顺序,优先安排分数值较高的患者 p_i -病床 b_j ,直到病床分配完成。

5) 当 $N < M$,即患者人数少于病床数时,由于病床数多,可任意按照算出的分数安排,也是很容易安排的。

由于这个模型和算法可以在一定程度上比较好地模拟日间手术预约分配过程,用计算出的列矩阵 R 中的分数值,为预约分配做参考值,给出安排患者 p_i -病床 b_j 的结果。这是一种高效的预约分配模型和算法,因此可以作为管理流程优化的一种可选择性方案。

5 程序与数值模拟结果

5.1 程序与数据

表 1 是某一次进行数值实验仿真的患者预约病床的登记的一种表格格式。它反映了二部图在计算机中的一种数据结构关系,和图 1 等效。并且表 1 在实际中较为常用,反映了一种患者和病床的预约分配过程的一种关系。图 3 是患者集合的投影图。

事实上,表 1 和(1)式的模型是对应关系。表 1 反映出的仍然是一种网络中的二部图形。通过计算可以获得邻接矩阵 A 。按照前面的有关图的理论^[5,10,19-20],表 2 给出图 1 的有关量化性质的计算结果。

表 2 二部图模型的节点性质

Tab. 2 Nodes properties of bipartite graph model

量化项	患者									
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
顶点值 1	0.8	0.9	0.85	0.75	0.95	0.9	0.9	0.6	0.85	0.9
分数值 1	0.828 3	0.828 3	0.857 5	0.828 3	0.533 3	0.857 5	0.891 7	1.250 0	0.716 7	0.808 3
顶点值 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
分数值 2	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.611 1	1.000 0	1.055 6	1.500 0	0.888 9	0.944 4
中心性	2	2	2	2	1	2	2	3	2	2
度分布	$p(k_1=1)=2/17$		$p(k_2=2)=9/17$			$p(k_3=3)=5/17$			$p(k_5=5)=1/17$	
图效率	5/68									

给出的预约-分配算法描述见图 4。

Input: $N, M, G, p_i, b_j, f(p_i), d(p_i)$	6. end for
Output: A, S, R ;	7. for all $i, j=1$ to N
1. $i \leftarrow N \in N, j \leftarrow M \in N$	8. $S \leftarrow s_{i,j}, \min(h_{p_i}, h_{p_j})$
2. $a_{i,j} = 1, p_i b_j \in E, a_{i,j} = 0, \text{otherwise}$	9. end for
3. $A \leftarrow a_{i,j}$	10. for all $i=1$ to N
4. for $l=1$ to M	11. $R \leftarrow r_{i,k}, P \leftarrow f(p_i)$
5. $B \leftarrow b_i$	12. end for

图 4 预约-分配算法

Fig. 4 Appointment-allocation algorithm

5.2 数值结果

根据图 1,可以得出 10×7 的邻接矩阵 A 和分配系数矩阵 W 中的数值,以及计算后的矩阵 R 值分别表示为^[19-21]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{cases} b_1 = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} + \frac{p_4}{2} \\ b_2 = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} + \frac{p_3}{2} + \frac{p_4}{2} + \frac{p_6}{2} \\ b_3 = \frac{p_3}{2} + \frac{p_6}{2} \\ b_4 = p_5 + \frac{p_7}{2} + \frac{p_8}{3} \\ b_5 = \frac{p_7}{2} + \frac{p_8}{3} + \frac{p_9}{2} \\ b_6 = \frac{p_8}{3} + \frac{p_9}{2} + \frac{p_{10}}{2} \\ b_7 = \frac{p_{10}}{2} \end{cases}, \mathbf{P}_{1st} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.85 \\ 0.75 \\ 0.95 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.6 \\ 0.85 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{2nd} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{8}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{10} & \frac{8}{30} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{10} & \frac{8}{30} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{7}{20} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{7}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{10} & \frac{8}{30} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{7}{20} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{7}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.8283 \\ 0.8283 \\ 0.8575 \\ 0.8283 \\ 0.5333 \\ 0.8575 \\ 0.8917 \\ 1.2500 \\ 0.7167 \\ 0.8083 \end{bmatrix}, \text{rank1} = \begin{bmatrix} p_8 = 1.25 \\ p_7 = 0.8917 \\ p_3 = 0.8575 \\ p_6 = 0.8575 \\ p_1 = 0.8283 \\ p_2 = 0.8283 \\ p_4 = 0.8283 \\ p_{10} = 0.8083 \\ p_9 = 0.7167 \\ p_5 = 0.5333 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0.6111 \\ 1.0000 \\ 1.0556 \\ 1.5000 \\ 0.8889 \\ 0.9444 \end{bmatrix}, \text{rank2} = \begin{bmatrix} p_8 = 1.5000 \\ p_7 = 1.0556 \\ p_1 = 1.0000 \\ p_2 = 1.0000 \\ p_3 = 1.0000 \\ p_4 = 1.0000 \\ p_6 = 1.0000 \\ p_{10} = 0.9444 \\ p_9 = 0.8889 \\ p_5 = 0.6111 \end{bmatrix}.$$

从第一次数值仿真结果看,在列矩阵 \mathbf{R} 中,患者分数 $p_8 > p_7 > p_3 = p_6 > p_1 = p_2 = p_4 > p_{10} > p_9 > p_5$ 的值按降序排列,如果出现第 7、第 8 序位两位患者的分数值相同情况,可以由医院人工选择安排。前 7 位预约患者被安排进了日间手术的病床,而 p_{10}, p_9, p_5 的分数值小。第二次数值仿真,患者顶点的输入值全部为 1,患者分数按 $p_8 > p_7 > p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_6 > p_{10} > p_9 > p_5$ 降序排序,而患者 p_{10}, p_9, p_5 的分数值小没有排进。在这次数

据池中并没有安排进入日间手术流程,进入新的数据池中可以再进行其他日期的预约分配。同一患者在同一个数据池中不能重复预约,保证了日间手术病房的合理安全运行。从数值模拟仿真结果看,算出的分数值主要和系统中设置的顶点的度有关系。

6 结论

用网络与图论、机器学习和计算机科学的方法,对日间手术预约-分配的管理过程进行模拟,是优化管理的途径之一,它可以提高医护人员的工作效率,降低工作强度。特别地,在目前综合性大医院就诊人数不断增加的情况下,日常的人工管理方式也会变得更加繁杂。随着计算机互联网的发展,基于网络和图论的模型的算法^[16,18,21-22],医院根据实际情况,设置合理的顶点的度数,用计算出的分数值来合理有效安排预约患者,是管理优化的趋势之一。目前该算法可解决手工安排预约患者中的困难任务,但是怎样使得模型算法变得更加智能化,软件变得更加互联网化、可视化,以适应在不同地点、不同时间段的预约患者动态变化情况,更好地为患者服务,更加符合医院未来的变化发展,还有待继续深入研究。

参考文献:

- [1] 于丽华. 中国日间手术发展的历程与展望[J]. 中国医院管理, 2016, 36(6): 16-18.
YU L H. Development and prospect of day surgery in China[J]. Chinese Hospital Management, 2016, 36(6): 16-18.
- [2] 安焱, 王振军. 日间手术的概念和基本问题[J]. 中国实用外科杂志, 2007, 27(1): 38-40.
AN Y, WANG Z J. Concept and basic problems of day surgery[J]. Chinese Journal of Practical Surgery, 2007, 27(1): 38-40.
- [3] EASLEY D, KLEINBERG J. 网络、群体与市场: 揭示高度互联世界的行为原理与效应机制[M]. 李晓明, 王卫红, 杨韞利, 译. 北京: 清华大学出版社, 2011.
EASLEY D, KLEINBERG J. Networks, crowds and markets: reasoning about a highly connected world[M]. LI X M, WANG W H, YANG W L, translate. Beijing: Tsinghua University Press, 2011.
- [4] LATORA V, NICOSIA V, RUSSO G. Complex networks: principles, methods and applications[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017.
- [5] RIGO M. Advanced graph theory and combinatorics[M]. London, UK; ISTE and NJ, US: John Wiley & Sons, 2016.
- [6] ZHOU T, REN J, MEDO M, et al. Bipartite network projection and personal recommendation[J]. Physical Review E, 2007, 76(4): 046115.
- [7] ZHU Y X, WANG W, TANG M, et al. Social contagions on weighted networks[J]. Physical Review E, 2017, 96(1): 012306.
- [8] DIANATI N. Unwinding the hairball graph: pruning algorithms for weighted complex networks[J]. Physical Review E, 2016, 93(1): 012304.
- [9] BARUCCA P. Spectral partitioning in equitable graphs[J]. Physical Review E, 2017, 95(6): 062310.
- [10] PENNEY R C. Linear algebra ideas and applications [M]. 4th edition. NJ, US: John Wiley & Sons, 2016.
- [11] ERCIYES K. Guide to graph algorithms: sequential, parallel and distributed[M]. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018.
- [12] BARRAT A, BARTHELEMY M, PASTOR-SATORRAS R, et al. The architecture of complex weighted networks [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2004, 101(11): 3747-3752.
- [13] OWEN T, BIANCONI C G. Weighted growing simplicial complexes[J]. Physical Review E, 2017, 95(6): 062301.
- [14] NEIMAN O, SOLOMON S. Simple deterministic algorithms for fully dynamic maximal matching[EB/OL]. (2013-02-18) [2018-09-01] <https://arxiv.org/pdf/1207.1277.pdf>.
- [15] ZENIL H, KIANI N A, TEGNÉR J. Low-algorithmic-complexity entropy-deceiving graphs [J]. Physical Review E, 2017, 96(1): 012308.
- [16] DEHMER M, EMMERT-STEIB F, CHEN Z Q, et al. Mathematical foundations and applications of graph entropy, volume 6[M]. Weinheim, Germany: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2016.
- [17] CHEN H, LI G F, ZHANG H F, et al. Optimal allocation of resources for suppressing epidemic spreading on networks[J]. Physical Review E, 2017, 96(1): 012321.
- [18] DANILA B. Comprehensive spectral approach for community structure analysis on complex networks[J]. Physical Review E, 2016, 93(2): 022301.
- [19] ROUTH O U. Matrix algorithms in Matlab[M]. Amsterdam: Elsevier, 2016.
- [20] SCHOTT J R. Matrix analysis for statistics[M]. NJ, US: John Wiley & Sons, 2017.
- [21] SHMUEL F. Matrices algebra, analysis and applications [M]. Singapore: World Scientific, 2016.
- [22] COOLEN T, ANNIBALE A, ROBERTS E. Generating random networks and graphs[M]. Oxford, UK: Oxford

University Press, 2017.

Operations Research and Cybernetics

A Study of Model and Algorithm Based on Graph Theory for Appointment-Allocation

LI Bin¹, LI Qun², LIU Yiping¹

(1. College of Engineering, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209;

2. Shanghai General Hospital, Shanghai 200080, China)

Abstract: [Purposes] With the rapid increase in number of people seeking medical treatment in day surgery, the processing of hospital is becoming more and more difficult and complex in response to the needs of patients for appointment-allocation. Manual filling in electronic spreadsheets is time-consuming and low efficient, which distracts attention from medical schemes. So there is an urgent need for new computing technology to solve the problem in the appointment-allocation. [Methods] Using network and graph theory method, problem between patients and wards can be solved. Rationally expressed as an optimal management of resources between patients and beds. That is to say, the corresponding relationship between patients and beds constitutes a bipartite graph model and algorithm. After adopting the improved algorithm, the data are simulated on the computer. [Findings] The sorting results based on the model and algorithm can be used as an optimized appointment-allocation method. [Conclusions] By using the bipartite graph model and improved algorithm, we can be effectively solve the current difficulties problem in the appointment and allocation of Day surgery, and optimize the management of medical resources.

Keywords: graph theory; algorithms; simulation; day surgery resource management

(责任编辑 黄 颖)

双渠道环境下异质品布局 and 定价策略研究*

张廷龙, 顾周凡

(安徽师范大学 经济管理学院, 安徽 芜湖 241000)

摘要:【目的】讨论了双渠道环境下制造商如何进行异质品布局问题,为商业实践提供决策参考。【方法】通过构建数理模型和逆向归纳法研究制造商在引入线上渠道时如何进行线上产品布局和定价,并通过数值分析研究相关参数对布局的影响。【结果】制造商的线上产品布局策略与高端产品相对低端产品的质量、成本以及消费者对网络渠道的接受程度有关。当消费者对网络渠道的接受程度和高端产品相对低端产品质量提升较大且高端产品成本增加较小时,制造商会选择线上销售高端产品;反之,制造商会选择线上销售低端产品。提高消费者对网络渠道的接受程度有利于制造商线上渠道的产品定价,而对零售商线下渠道的产品定价不利。【结论】不存在一种严格占优的布局策略,制造商应综合考虑各种因素进行异质品布局。

关键词:双渠道;供应链;异质品;布局策略

中图分类号:O225;F274

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)05-0001-09

随着电子商务的快速发展,中国网民数量和网络购物规模均迅速增长。中国互联网信息中心发布的第43次《中国互联网络发展状况统计报告》显示:截止2018年12月,中国网民规模达8.29亿,普及率达59.6%,其中网络购物用户规模达6.10亿^[1]。大型制造商为抢占市场份额纷纷开辟网络直销渠道以提高自身竞争力,但网络直销渠道的引入势必会对传统零售渠道造成冲击,导致渠道冲突。因此,如何缓解渠道冲突成为双渠道供应链研究中的重要问题。肖剑等人^[2]提出,制造商应该就服务水平与零售商展开合作,从而缓解渠道冲突,实现利润的最大化。Chen等人^[3]研究了制造商占优的供应链,通过改进的批发价格契约实现了供应链的协调。Abhishek等人^[4]研究了电子商务环境下不同销售模式对供应链的影响,发现代销策略效率最高。王先甲等人^[5]研究了生产商规模不经济时的双渠道供应链,发现收益共享契约可以实现供应链协调。张廷龙等人^[6]研究了景区和旅行社组成的旅游供应链,发现可以使用收益共享契约实现旅游供应链的完美协调。

以上文献都是基于单一产品情形下的研究。而在现实生活中,随着消费者个性化需求的不断增加,采用异质品(不同品质或规格的同类商品)策略越来越普遍^[7-15]。如华为2016年推出的新款手机Mate 9,就根据品质分为4000元档和8000元档两种价位进行销售。因此,考虑异质品的双渠道供应链研究具有现实意义。Yan^[7]对双渠道供应链中品牌差异化策略进行了研究,发现市场规模和品牌差异化程度对零售商的利润有正向影响。Yan^[8]的研究还发现,销售不同品牌的产品虽然可以有效缓解渠道冲突,但不能实现整个供应链的协调。陈远高等人^[9]对比分析了双渠道供应链中销售单一产品和差异化产品,认为产品差异化会导致供应链系统利润的减少。但斌等人^[10]通过构建消费者购买异质品的效用模型,对比分析了不同决策方式下的最优决策和利润情况,并使用两部收费策略实现了供应链协调。刘咏梅等人^[11]将Salop模型引入双渠道供应链的新产品开发的研发中,分别构建不同渠道下的效用函数,得出了不同权力渠道结构下的新产品质量和产品定价。该研究假设线下已有新旧两种产品时,线上仅销售新产品,探讨集中决策和分散决策下制造商开辟线上渠道销售新产品的最优新产品定价和对利润的影响。张喜征等人^[12]同样利用Salop模型,对双渠道供应链中可替代产品的竞争与协调进行研究,发现可替代产品的竞争会导致渠道冲突。Ha等人^[13]研究了产品质量对双渠道供应链的影响,研究表明,制造商在产品销售成本和因为质量提升带来的生产成本都较低时开辟网络渠道是最有利的。周健等人^[14]研

* 收稿日期:2018-10-08 修回日期:2019-08-30 网络出版时间:2019-09-26 11:24

资助项目:安徽省自然科学基金(No. 1608085MG152)

第一作者简介:张廷龙,男,教授,博士,研究方向为物流与供应链管理,E-mail:ztlahnu@163.com;通信作者:顾周凡,男,E-mail:zhoufangu@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1124.034.html

究了产品的差异性对定价的影响后发现,采用线上高端-线下高端的布局策略对制造商、零售商和供应链整体都有利,但是研究时假定高端产品和低端产品的生产成本相同且忽略不计,这与实际不尽相符。

可以发现,有关异质品的研究都是在线上线下布局给定的情况下展开的,而对于制造商如何在双渠道供应链中进行异质产品的布局还鲜有研究。因此,本文研究制造商同时生产高端和低端两种产品时如何进行线上渠道布局的问题。和文献[11]不同的是,本文假设制造商分类布局线下渠道,比较线上销售高端产品和低端产品两种策略,找出对制造商最有利的线上产品布局策略。

本文分为 5 个部分,主要对制造商的线上产品布局展开研究。第一部分进行问题的描述和基本模型的构建,第二部分讨论了两种具体的布局策略,第三部分在第二部分的基础上对两种线上布局策略进行具体分析,试图找到对制造商和对供应链整体最优的布局策略,第四部分通过数值分析研究了相关参数对制造商利润的影响,最后一部分为文章的小结。

1 问题描述与基本模型

考虑一个制造商与两个线下零售商构成的供应链,制造商具有优势地位,两零售商之间市场地位相同。制造商同时生产高端和低端两种同类产品。假设制造商分类布局线下渠道,即高端产品和低端产品分别通过零售商 1 和零售商 2 进行销售。高端产品以批发价格 w_1 供给零售商 1,零售商 1 按照零售价 p_1 进行销售;低端产品以批发价格 w_2 供给零售商 2,零售商 2 按照零售价 p_2 进行销售, $w_1 > w_2$ 。供应链结构如图 1 所示。现在制造商开辟了线上渠道,那么在保持现有线下渠道布局的基础上,进行线上产品布局时会面临以下问题:在保持目前线下渠道格局下,制造商的线上渠道是卖高端产品(记为 H 策略)还是卖低端产品(记为 L 策略)? 线上渠道的产品如何定价(记为 p_0)? 制造商的线上渠道产品布局对供应链整体而言是否是优化的选择?

根据文献[11],令低端产品的质量为 q ,高端产品的质量为 $q + \beta q$,其中 β 表示高端产品与低端产品的质量比, β 越大说明高端产品相对于低端产品的质量改善程度越大, $\beta > 0$ 。根据参考文献[16],假设消费者对产品价值的感知等于产品质量。生产低端产品的单位成本为 c_0 ,生产高端产品的单位成本为 $c_0 + c$, $c > 0$ 。在不影响结论的基础上,为便于计算,令 $c_0 = 0$ 。假设线上渠道给消费者带来的便利程度用 s 表示;消费者在线下渠道购物需要交通成本,单位交通成本用 t 表示;消费者对网络渠道的接受程度用 θ 表示, $\theta \in [0, 1]$, θ 与产品的数字化程度、网络商店的物流水平、网络商店的口碑等因素有关, θ 越大,产品的数字化程度越高、网络商店的物流水平越高、网络商店的口碑越好。

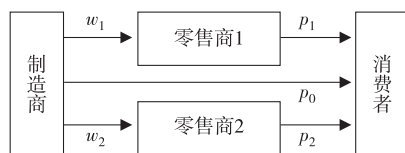


图 1 供应链结构

Fig. 1 The structure of supply chain

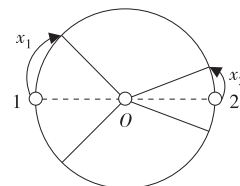


图 2 制造商和两零售商并存的市场模型

Fig. 2 The marketing model of a manufacture and two retailers

参照文献[11],采用 Salop^[17] 环形城市模型描述制造商双渠道销售异质产品情形。如图 2 所示,假设市场是一个环形城市,周长为 1,消费者均匀分布在环形城市上,数量为 1。线上渠道用圆心 O 点表示,零售商 1 和零售商 2 用圆上对称的两点 1,2 表示,消费者与点 1,2 的距离表示其从零售商 1,2 处购买产品所需要的努力程度。从图 2 可以看出,因为消费者分布在环形市场的两个方向上,所以消费者的需求为单方向距离的两倍。仅考虑零售商 1 和零售商 2 的上半环,假设有数量为 x_1 的消费者从零售商 1 处购买高端产品,数量为 x_2 的消费者从零售商 2 处购买低端产品,考虑所有渠道都有需求,有 $x_1 + x_2 < 0.5$,那么在线上渠道购买产品的消费者数量为 $0.5 - x_1 - x_2$ 。

2 制造商不同产品布局策略研究

本节考虑制造商线上渠道销售高端产品(H 策略)和低端产品(L 策略)两种策略,分别研究每种策略下的决策均衡解和利润情况。

相关变量分别用上标“H”和“L”表示 H 策略和 L 策略情形。

2.1 H 策略:线上销售高端产品

当制造商线上采用 H 策略布局时,消费者在零售商 1 处购买高端产品所得到的效用为 $U_1^H = q + \beta q - p_1^H - tx_1^H$;在零售商 2 处购买低端产品所得到的效用为 $U_2^H = q - p_2^H - tx_2^H$;在网店购买高端产品所得到的效用为 $U_0^H = \theta(q + \beta q) - p_0^H + s$ 。市场边界条件满足 $U_1^H = U_0^H, U_2^H = U_0^H$,得到:

$$x_1^H = \frac{(1-\theta)(q + \beta q) - p_1^H + p_0^H - s}{t}, \quad (1)$$

$$x_2^H = \frac{(1-\theta-\theta\beta)q - p_2^H + p_0^H - s}{t}. \quad (2)$$

那么零售商 1、零售商 2 和线上渠道对应的需求记为 D_1^H, D_2^H, D_0^H ,则有:

$$D_1^H = \frac{2[(1-\theta)(q + \beta q) - p_1^H + p_0^H - s]}{t}, \quad (3)$$

$$D_2^H = \frac{2[(1-\theta-\theta\beta)q - p_2^H + p_0^H - s]}{t}, \quad (4)$$

$$D_0^H = \frac{t - 2(2 - 2\theta + \beta - 2\theta\beta)q}{t} + \frac{2(p_1^H + p_2^H - 2p_0^H + 2s)}{t}. \quad (5)$$

在消费者需求为上式的情况下,零售商和制造商的利润函数为:

$$\Pi_1^H = (p_1^H - w_1)D_1^H, \quad (6)$$

$$\Pi_2^H = (p_2^H - w_2)D_2^H, \quad (7)$$

$$\Pi_0^H = (p_0^H - c)D_0^H + (w_1 - c)D_1^H + w_2D_2^H. \quad (8)$$

对上述公式求最优定价,有定理 1。

定理 1 H 策略下,制造商和零售商的最优定价为:

$$p_0^H = \frac{2\theta\beta q + 2\theta q + c - \beta q + 2s + t + 2w_1 + 2w_2 - 2q}{4},$$

$$p_1^H = \frac{-2\theta\beta q - 2\theta q + c + 3\beta q - 2s + t + 6w_1 + 2w_2 + 2q}{8},$$

$$p_2^H = \frac{-2\theta\beta q - 2\theta q + c - \beta q - 2s + t + 2w_1 + 6w_2 + 2q}{8}.$$

证明 在 Stackelberg 博弈模型中,制造商作为主导者,首先制定线上渠道价格 p_0^H ,在已知制造商定价策略的基础上,零售商 1 和零售商 2 根据 $\frac{\partial \pi_1^H}{\partial p_1^H} = 0, \frac{\partial \pi_2^H}{\partial p_2^H} = 0$ 分别制定最优零售价格 p_1^H, p_2^H ,代入制造商利润函数,得到 p_0^H 。最后将 p_0^H 带回 p_1^H, p_2^H 得证。 证毕

根据制造商和零售商的最优定价可以推出各自的最大销量,代入利润公式可得定理 2。

定理 2 H 策略下,零售商 1、零售商 2 和制造商的最大利润为 $\Pi_1^H = \frac{F_1^2}{32t}, \Pi_2^H = \frac{F_2^2}{32t}, \Pi_0^H = \frac{F_1(w_1 - c)}{4t} + \frac{F_2w_2}{4t} + \frac{F_3F_4}{8t}$ 。其中, $F_1 = -2\theta\beta q - 2\theta q + c + 3\beta q - 2s + t - 2w_1 + 2w_2 + 2q, F_2 = -2\theta\beta q - 2\theta q + c - \beta q - 2s + t + 2w_1 - 2w_2 + 2q, F_3 = 2\theta\beta q + 2\theta q - 3c - \beta q + 2s + t + 2w_1 + 2w_2 - 2q, F_4 = 2\theta\beta q + 2\theta q - c - \beta q + 2s + t - 2q$ 。

2.2 L 策略:线上销售低端产品

当制造商线上采用 L 策略布局时,消费者在零售商 1 处购买高端产品所得到的效用为 $U_1^L = q + \beta q - p_1^L - tx_1^L$;在零售商 2 处购买低端产品所得到的效用为 $U_2^L = q - p_2^L - tx_2^L$;在网店购买低端产品所得到的效用为 $U_0^L = \theta q - p_0^L + s$ 。市场边界条件满足 $U_1^L = U_0^L, U_2^L = U_0^L$,得到:

$$x_1^L = \frac{(1-\theta)q + \beta q - p_1^L + p_0^L - s}{t}, \quad (9)$$

$$x_2^L = \frac{(1-\theta)q - p_2^L + p_0^L - s}{t}. \quad (10)$$

那么零售商 1、零售商 2 和线上渠道对应的需求记为 D_1^L, D_2^L, D_0^L ,则有:

$$D_1^L = \frac{2[(1-\theta)q + \beta q - p_1^L + p_0^L - s]}{t}, \quad (11)$$

$$D_2^L = \frac{2[(1-\theta)q - p_2^L + p_0^L - s]}{t}, \quad (12)$$

$$D_0^L = \frac{t - 2[(2 - 2\theta + \beta)q - p_1^L - p_2^L + 2p_0^L - 2s]}{t}. \quad (13)$$

在消费者需求为上式的情况下,零售商的利润函数同(6),(7)式,制造商的利润函数为:

$$\Pi_0^L = p_0^L D_0^L + (\omega_1 - c)D_1^L + \omega_2 D_2^L. \quad (14)$$

定理 3 L 策略下,制造商和零售商的最优定价为:

$$p_0^L = \frac{2\theta q - c - \beta q + 2s + t + 2\omega_1 + 2\omega_2 - 2q}{4},$$

$$p_1^L = \frac{-2\theta q - c + 3\beta q - 2s + t + 6\omega_1 + 2\omega_2 + 2q}{8},$$

$$p_2^L = \frac{-2\theta q - c - \beta q - 2s + t + 2\omega_1 + 6\omega_2 + 2q}{8}.$$

根据制造商和零售商的最优定价可以推出各自的最大销量,代入利润公式可得定理 4。

定理 4 L 策略下,零售商 1、零售商 2 和制造商的最大利润为 $\Pi_1^L = \frac{F_5^2}{32t}$, $\Pi_2^L = \frac{F_6^2}{32t}$, $\Pi_0^L = \frac{F_5(\omega_1 - c)}{4t} + \frac{F_6\omega_2}{4t} +$

$\frac{F_7 F_8}{8t}$ 。其中:

$$F_5 = -2\theta q - c + 3\beta q - 2s + t - 2\omega_1 + 2\omega_2 + 2q,$$

$$F_6 = -2\theta q - c - \beta q - 2s + t + 2\omega_1 - 2\omega_2 + 2q,$$

$$F_7 = 2\theta q - c - \beta q + 2s + t + 2\omega_1 + 2\omega_2 - 2q,$$

$$F_8 = 2\theta q + c - \beta q + 2s + t - 2q.$$

比较定理 1 和定理 3 中不同布局策略下的定价,可得定理 5 和定理 6。

定理 5 H 策略下零售商线下高低端产品的定价与 L 策略下均不同,但无论 H 策略还是 L 策略下,零售商高端产品的定价均高于低端产品,且差价相同。

证明 $p_1^H - p_2^H = p_1^L - p_2^L = \frac{\beta q + \omega_1 - \omega_2}{2}$, 因为 $\omega_1 > \omega_2$, 所以 $\frac{\beta q + \omega_1 - \omega_2}{2} > 0$ 。证毕

定理 5 说明,零售商线下产品定价随着制造商线上产品布局不同而发生变化,但高端产品的定价一定高于低端产品。制造商不用担心因为线上产品布局而影响线下产品定价,因为线下产品的定价相对是稳定的,高低端产品间有稳定的价格差。

定理 6 H 策略下,当 $\theta > \theta_1$ 时, $p_0^H > p_1^H$; 当 $\theta < \theta_1$ 时, $p_0^H < p_1^H$ 。L 策略下,当 $\theta > \theta_2$ 时, $p_0^L > p_2^L$; 当 $\theta < \theta_2$ 时, $p_0^L < p_2^L$ 。其中, $\theta_1 = 1 + \frac{2(\omega_1 - \omega_2) - \beta q - c - 6s - t}{6q(1 + \beta)}$, $\theta_2 = 1 + \frac{\beta q + c - 2(\omega_1 - \omega_2) - 6s - t}{6q}$ 。

证明 令 $p_0^H - p_1^H = 0$, $p_0^L - p_2^L = 0$, 解得:

$$\theta_1 = 1 + \frac{2(\omega_1 - \omega_2) - \beta q - c - 6s - t}{6q(1 + \beta)},$$

$$\theta_2 = 1 + \frac{\beta q + c - 2(\omega_1 - \omega_2) - 6s - t}{6q},$$

根据单调性可得定理 6。

证毕

定理 6 说明,当消费者对网络渠道的接受程度增到足够大时, H 策略下线上高端产品的定价要高于线下高端产品, L 策略下线上低端产品的定价要高于线下低端产品,这与传统观点认为的线上产品定价低于线下是不同的。就 H 策略进行分析,如果高低端产品的批发价格差比高端产品的质量、成本以及线上购物给消费者带来的便利程度大,即 $2(\omega_1 - \omega_2) > \beta q - c - 6s - t$, 此时 $\theta_1 > 1$ 恒成立,不会出现相同产品线上定价高于线下的情况;如果高端产品的质量、成本较大且线上购物给消费者带来的便利程度较大,即 $2(\omega_1 - \omega_2) < \beta q - c - 6s - t$, 此时 $\theta_1 < 1$, 并且随着高端产品的质量、成本、线上购物给消费者带来的便利程度的增加而减小,会出现相同产品线上

定价高于线下的情况。可以发现,如果高端产品的质量和成本较大,线上购物给消费者带来的便利程度较大时,就有可能出现高端产品线上定价比线下高的情况。同理,如果高低端产品的批发价格差较大且线上渠道给消费者带来的便利程度较大时,就有可能出现低端产品线上定价比线下高的情况。

3 制造商布局决策

讨论消费者对网络渠道的接受程度对两种布局策略下渠道成员最优定价的影响,可得定理 7。

定理 7 随着消费者对网络渠道的接受程度 θ 的不断增大,无论制造商选择 H 策略还是 L 策略,制造商的线上渠道产品定价 p_0^H, p_0^L 都会提高,而零售商 1 和零售商 2 的零售价格 $(p_1^H, p_2^H), (p_1^L, p_2^L)$ 都会降低。

证明 $\frac{\partial p_0^H}{\partial \theta} = \frac{(1+\beta)q}{2} > 0, \frac{\partial p_1^H}{\partial \theta} = \frac{\partial p_2^H}{\partial \theta} = -\frac{(1+\beta)q}{4} < 0, \frac{\partial p_0^L}{\partial \theta} = \frac{q}{2} > 0, \frac{\partial p_1^L}{\partial \theta} = \frac{\partial p_2^L}{\partial \theta} = -\frac{q}{4} < 0$ 。 证毕

定理 7 说明,提高消费者对网络渠道的接受程度 θ 会使制造商提高线上渠道产品定价,同时降低零售商的零售价格。

比较定理 2 和定理 4 中制造商的最大利润,可得定理 8。

定理 8 当消费者对网络渠道的接受程度大于高端产品的成本质量比,即 $\theta > \frac{c}{\beta q}$ 时,制造商会选择 H 策略;当产品的数字属性小于高端产品的成本质量比,即 $\theta < \frac{c}{\beta q}$ 时,制造商会选择 L 策略。

证明 两种布局下制造商的利润情况如图 3 所示。计算可得 $\Pi_0^H - \Pi_0^L = \frac{F_9}{2t}$ 。其中, $F_9 = F_{10} - F_{11} + c^2 - \theta^2 \beta^2 q^2, F_{10} = \theta \beta q (2\theta \beta q + 2\theta q - c - \beta q + 2s + t - 2q), F_{11} = c(2\theta q + c - \beta q + 2s + t - 2q)$ 。令 $F_{12} = 2\theta \beta q + 2\theta q - c - \beta q + 2s + t - 2q, F_{13} = 2\theta q + c - \beta q + 2s + t - 2q$, 计算知 $F_{13} = F_{12} - 2(\theta \beta q - c)$ 。

由定理 2 和定理 4 的证明可知: $F_{12} > 0, F_{13} > 0$, 那么 $F_{12} - (\theta \beta q - c) > 0$ 恒成立, 又因为 $F_9 = (\theta \beta q - c)(F_{13} + \theta \beta q - c) = (\theta \beta q - c)(F_{12} - \theta \beta q + c)$, 所以, 当 $\theta > \frac{c}{\beta q}$ 时, $F_9 > 0$; 当 $\theta < \frac{c}{\beta q}$ 时, $F_9 < 0$ 。 证毕

定理 8 表明,制造商不存在一种严格占优的线上渠道产品布局策略。当消费者对网络渠道的接受程度和高端产品相对低端产品质量提升很大,且高端产品的成本增加很小时,制造商会选择 H 策略;反之,制造商会选择 L 策略。商业实践中,制造商应该根据消费者对产品的接受程度、产品的高低端差异程度等因素,合理布局,使自身利润最大化。

定理 8 给出了使制造商利润最大化的产品布局策略。下面进一步考察这样的布局策略对供应链整体而言,是否是优化的选择。

定理 9 当线上渠道给消费者购物带来的便利程度 $s \geq s_1$ 时,使制造商达到最优的布局策略对供应链整体而言是优化的选择;当线上渠道给消费者购物带来的便利程度 $s < s_1$ 时,使制造商达到最优的布局策略对供应链整体而言不总是优化的选择,其中 $s_1 = \frac{3\beta q + 6q - t}{6}$ 。

证明 记 $\Pi^H = \Pi_0^H + \Pi_1^H + \Pi_2^H, \Pi^L = \Pi_0^L + \Pi_1^L + \Pi_2^L$, 那么 $\Pi^H - \Pi^L = \frac{(\theta \beta q - c)F_{14}}{4t}$, 其中, $F_{14} = 6\theta q + 3\theta \beta q + 6s + t - 3\beta q - 6q$ 。可以发现, F_{14} 是一个关于 θ 单调递增的函数, 令上式为 0 可得: $\theta = \frac{3\beta q + 6q - 6s - t}{3\beta q + 6q}$ 。

$s \geq s_1$ 时, $3\beta q + 6q - 6s - t \leq 0$, 此时 $F_{14} \geq 0$ 恒成立。不同布局下的总利润如图 4 所示。

$s < s_1$ 时, $3\beta q + 6q - 6s - t > 0$, 此时分情况讨论: 1) $s < s_2$ 时, 计算得: θ 在 $(0, \frac{c}{\beta q})$ 时, $F_{14} > 0$; θ 在 $(\frac{c}{\beta q}, \frac{3\beta q + 6q - 6s - t}{3\beta q + 6q})$ 时, $F_{14} < 0$; θ 在 $(\frac{3\beta q + 6q - 6s - t}{3\beta q + 6q}, 1)$ 时, $F_{14} > 0$ 。其中, $s_2 = s_1 - \frac{t}{6}$ 。不同布局下的总利润如图 5 所示。2) $s \geq s_2$ 时, 计算得, θ 在 $(0, \frac{3\beta q + 6q - 6s - t}{3\beta q + 6q})$ 时, $F_{14} > 0$; θ 在 $(\frac{3\beta q + 6q - 6s - t}{3\beta q + 6q}, \frac{c}{\beta q})$ 时, $F_{14} < 0$; θ 在 $(\frac{c}{\beta q}, 1)$ 时, $F_{14} > 0$ 。不同布局下的总利润如图 6 所示。

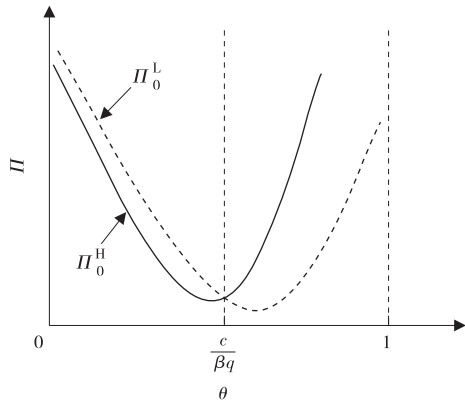


图 3 两种布局下制造商利润情况

Fig. 3 The manufacturer's profit of two layouts

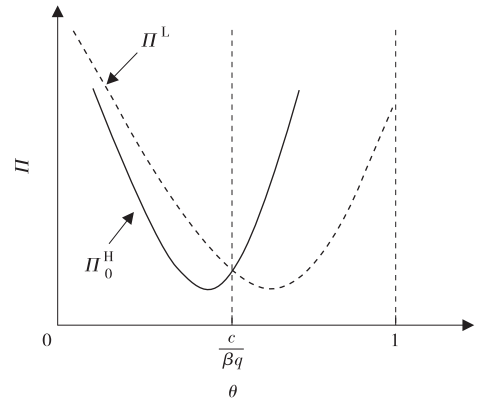


图 4 $s \geq s_1$ 时两种布局总利润情况

Fig. 4 The total profit of two layouts when $s \geq s_1$

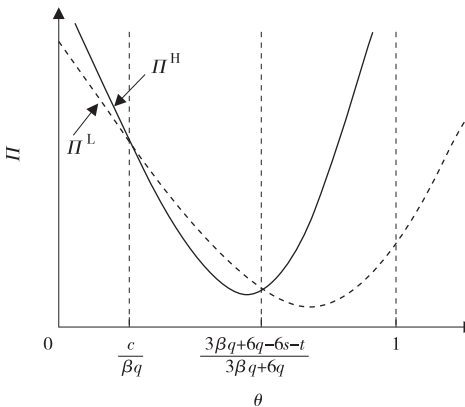


图 5 $s < s_2$ 时两种布局总利润情况

Fig. 5 The total profit of two layouts when $s < s_2$

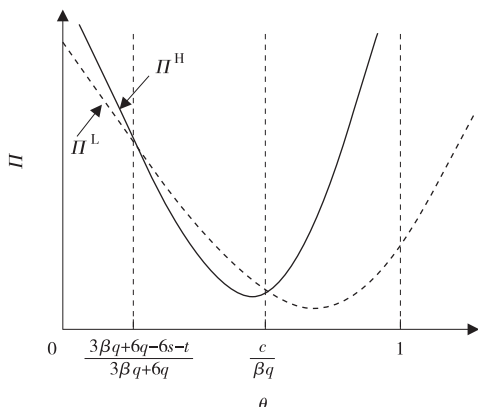


图 6 $s \geq s_2$ 时两种布局总利润情况

Fig. 6 The total profit of two layouts when $s \geq s_2$

根据图 4~6 可以发现,无论线上渠道给消费者购物带来的便利程度如何,只要消费者对网络渠道的接受程度介于 $\frac{c}{\beta q}$ 和 $\frac{3\beta q+6q-6s-t}{3\beta q+6q}$ 之间,制造商线上布局低端产品时供应链的总利润都大于高端产品。反之,制造商线上布局高端产品时供应链的总利润都大于低端产品。这是因为消费者对网络渠道的接受程度介于 $\frac{c}{\beta q}$ 和 $\frac{3\beta q+6q-6s-t}{3\beta q+6q}$ 之间时,购物时会在线上 and 线下渠道之间产生犹豫,延缓购物。而消费者对网络渠道的接受程度接近 0 或接近 1 时,消费者很容易在线上 and 线下渠道之间做出选择,从而使自身利润增大。 证毕

定理 9 表明,制造商的最优布局策略对于供应链整体而言并不总是优化的。供应链整体的优化还需要考虑线上渠道给消费者带来的便利程度 s 以及消费者在线下渠道购物产生的单位交通成本 t 等因素。从供应链总体利润优化的角度来看,制造商应尽可能通过提高物流速度、提升物流水平、提高网络商店的口碑、选择产品数字属性高的商品在线上销售等方法,提高线上购物的便利程度和消费者对网络渠道的接受程度,使得制造商利润最大的布局方式与供应链整体优化的布局方式一致。

通过定理 9 可知,在 $s \geq s_2$ 且 $\theta \geq \frac{3\beta q+6q-6s-t}{3\beta q+6q}$ 时,使制造商达到最优的布局策略对供应链整体是优化的选择。对制造商来说,在保证自己最优布局的前提下,实现供应链整体的优化,更有利于维持渠道成员的稳定性。因此,怎样实现同时满足制造商最优布局 and 供应链整体优化布局的区域最大化,即图 7 中阴影部分面积最大化,是接下来要研究的问题。

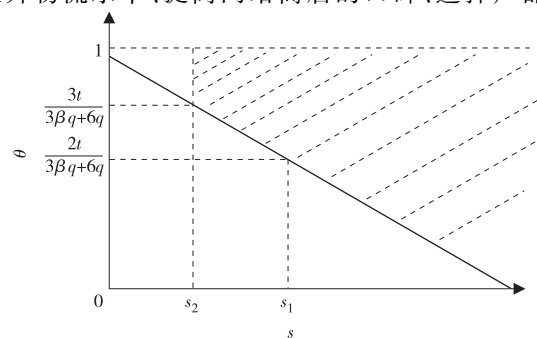


图 7 θ, s 对两种布局总利润的影响

Fig. 7 The influence on total profit of two layouts about θ, s

定理 10 当 $t = \sqrt{6q(2+\beta)}$ 时,同时满足制造商最优布局和供应链整体优化布局的区域实现最大化。

证明 要使阴影部分面积最大,只要求出空白部分面积的最小值即可。计算知,图中直线的函数表达式为

$$\theta = -\frac{6}{3\beta q + 6q}s + \frac{3\beta q + 6q + t}{3\beta q + 6q},$$

阴影部分左边的矩形面积为 s_2 ,阴影部分下方的三角形面积为 $\frac{(s_2 - s_1)t}{2\beta q + 4q}$,代入 s_1 和

$$s_2 \text{ 可得,空白部分面积为 } S_{bb} = \frac{t^2}{4(3\beta q + 6q)} + \frac{3\beta q + 6q}{6} - \frac{t}{12}, \text{ 所以 } S_{bb} \geq \sqrt{2\frac{t^2}{24}} - \frac{t}{12} = \frac{t}{\sqrt{12}} - \frac{t}{12}, \text{ 当且仅当}$$

$$\frac{t^2}{4(3\beta q + 6q)} = \frac{3\beta q + 6q}{6}, \text{ 即 } t = \sqrt{6q(2+\beta)} \text{ 时等号成立,此时空白部分面积最小,阴影部分面积最大。} \quad \text{证毕}$$

4 数值分析

第 3 节对制造商的布局决策进行了分析,分别给出了制造商采用 H 策略和 L 策略所对应的条件。本节采用数值分析的方法就参数 c, β, q 对制造商和零售商利润的影响展开具体分析,以期得到更多的管理启示。根据参考文献[11],假设 $t=1, s=1, \omega_1=2, \omega_2=1, \theta=0.7$ 。

首先,研究高端产品的超越成本 c 对制造商和零售商利润的影响。令 $\beta=2, q=1$,如表 1 所示。

可以发现,随着高端产品的超越成本 c 的增加,1) 制造商无论采用 H 策略还是 L 策略,利润都随之降低;2) H 策略下零售商 1 的利润随之增加,零售商 2 的利润随之降低;L 策略下零售商 1 的利润随之降低,零售商 2 的利润随之增加。所以对于制造商来说,降低高端产品的超越成本有助于提高企业利润,同时,这会降低零售商 1 的利润,增加零售商 2 的利润。

随后,对高端产品与低端产品的质量比 β 对渠道成员利润的影响进行研究,令 $c=0.5, q=1$,如表 2 所示。

可以发现,随着高端产品与低端产品的质量比 β 的增加,1) 制造商采用 H 策略会增加利润,采用 L 策略利润会先减少后增加,有一定的波动性;2) H 策略和 L 策略下,零售商 1 和零售商 2 的利润都随之增加,但 H 策略下零售商 2 利润的增加幅度更大,L 策略下零售商 1 利润的增加幅度更大。所以对于制造商来说,采用 H 策略提高高低端产品的质量比会增加利润,采用 L 策略时调整高低端产品的质量比,利润具有波动性。

最后,研究低端产品的质量 q 对制造商和零售商利润的影响,如表 3 所示。

可以发现,随着低端产品质量 q 的增加,H 策略和 L 策略下制造商和零售商的利润都随之增加。所以对制造商来说,提高低端产品质量不仅能够增加自身利润,还能提高渠道成员的稳定性。

综合表 1~3 可以发现,制造商可以通过调整高端、低端产品的质量比以及高端产品的超越成本达到提高利润的目的。其中,提高低端产品的质量对它来说是优化的,因为此时两零售商也从中获利,提高了渠道成员的稳定性。

表 1 参数 c 对制造商和零售商利润的影响

Tab. 1 The effect of parameter c on profit of manufacturer and retailer

β	q	c	Π_1^H	Π_2^H	Π_3^H	Π_1^L	Π_2^L	Π_0^L
2	1	1.1	0.113	0.138	1.451	0.195	0.070	1.181
2	1	1.2	0.125	0.125	1.300	0.180	0.080	1.120
2	1	1.3	0.138	0.113	1.151	0.165	0.090	1.061
2	1	1.4	0.151	0.101	1.005	0.151	0.101	1.005
2	1	1.5	0.165	0.090	0.861	0.138	0.113	0.951
2	1	1.6	0.180	0.080	0.720	0.125	0.125	0.900
2	1	1.7	0.195	0.070	0.581	0.113	0.138	0.851
2	1	1.8	0.211	0.061	0.445	0.101	0.151	0.805
2	1	1.9	0.228	0.053	0.311	0.090	0.165	0.761

表 2 参数 β 对制造商和零售商利润的影响

Tab. 2 The effect of parameter β on profit of manufacturer and retailer

β	q	c	Π_1^H	Π_2^H	Π_3^H	Π_1^L	Π_2^L	Π_0^L
1	1	0.5	0.003	0.003	1.911	0.000	0.000	1.701
1.5	1	0.5	0.008	0.070	2.156	0.080	0.005	1.620
2	1	0.5	0.053	0.228	2.411	0.300	0.025	1.601
2.5	1	0.5	0.138	0.475	2.676	0.661	0.061	1.645
3	1	0.5	0.263	0.813	2.951	1.163	0.113	1.751
3.5	1	0.5	0.428	1.240	3.236	1.805	0.180	1.920
4	1	0.5	0.633	1.758	3.531	2.588	0.263	2.151
4.5	1	0.5	0.878	2.365	3.836	3.511	0.361	2.445
5	1	0.5	1.163	3.063	4.151	4.575	0.475	2.801

5 结论

本文研究了异质性产品的制造商线上产品布局问题。通过构建数理模型,定量比较了制造商线上销售高端产品和低端产品时的利润,给出了制造商的最优产品布局策略。进一步考察了这种最优产品布局策略对供应链整体而言是否是优化的,最后通过数值分析研究了相关参数对利润的影响。研究表明,提高消费者对网络渠道的接受程度会提高制造商的线上产品定价,降低零售商的线下产品定价。对制造商来说,不存在一种严格占优的线上渠道产品布局策略。制造商的最优产品布局策略对供应链整体来说,并不总是优化的。此外,该研究是在零售商地位对等的基础上进行的,对于两零售商地位不对等的情形还需进一步研究。

参考文献:

- [1] 中国互联网络信息中心. 第 43 次中国互联网络发展状况统计报告[EB/OL]. (2019-08-28)[2019-08-29]. http://www.cnnic.cn/gwym/xwzx/rdxw/20172017_7056/201902/W020190228474508417254.pdf.
CNNIC. 43rd statistical report on the development of internet in China[EB/OL]. (2019-08-28)[2019-08-29]. http://www.cnnic.cn/gwym/xwzx/rdxw/20172017_7056/201902/W020190228474508417254.pdf.
- [2] 肖剑,但斌,张旭梅. 双渠道供应链中制造商与零售商的服务合作定价策略[J]. 系统工程理论与实践,2010,12:2203-2211.
XIAO J, DAN B, ZHANG X M. Service cooperation pricing strategy between manufacture and retailers in dual-channel supply chain[J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2010, 12: 2203-2211.
- [3] CHEN J, ZHANG H, SUN Y. Implementing coordination contracts in a manufacturer Stackelberg dual-channel supply chain[J]. Omega, 2012, 40(5): 571-583.
- [4] ABHISHEK V, JERATH K, ZHANG Z J. Agency selling or reselling? Channel structures in electronic retailing[J]. Management Science, 2016, 62(8): 2259-2280.
- [5] 王先甲,周亚平,钱桂生. 生产商规模不经济的双渠道供应链协调策略选择[J]. 管理科学学报, 2017(1): 17-31.
WANG X J, ZHOU Y P, QIAN G S. The selection of dual-channel supply chain coordination strategy considering manufacturer's diseconomies of scale[J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 01: 17-31.
- [6] 张廷龙,房进军. 收益共享契约下旅游供应链竞争与协调[J]. 系统工程, 2017, 35(1): 124-129.
ZHANG T L, FANG J J. Competing and coordination strategies for tourism supply chain under revenue sharing contract[J]. Systems Engineering, 2017, 35(1): 124-129.
- [7] YAN R L. Product brand differentiation and dual-channel store performances of a multi-channel retailer[J]. European Journal of Marketing, 2010, 44(5): 636-642.
- [8] YAN R L. Managing channel coordination in a multi-channel manufacturer-retailer supply chain[J]. Industrial Marketing Management, 2010, 44(4): 672-692.
- [9] 陈远高,刘南. 存在差异性产品的双渠道供应链协调研究[J]. 管理工程学报, 2011, 25(2): 239-244.
CHEN Y G, LIU N. Coordination of dual-channel supply chain under product differentiation [J]. Journal of Industrial Engineering/Engineering Management, 2011, 25(2): 239-244.
- [10] 但斌,王瑶,王磊,等. 考虑制造商服务努力的异质产品双渠道供应链协调[J]. 系统管理学报, 2013, 22(6): 835-840.
DAN B, WANG Y, WANG L, et al. Coordination of dual-channel heterogeneous product supply chain based on manufacturer's sale effort[J]. Journal of Systems & Management, 2013, 22(6): 835-840.
- [11] 刘咏梅,廖攀,胡军华. 电子商务环境下考虑竞争的新产品开发 and 定价策略研究[J]. 管理工程学报, 2016(2): 210-215.
LIU Y M, LIAO P, HU J H. New product development and pricing strategies in E-commerce environment considering competition[J]. Journal of Industrial Engineering / Engineering Management, 2016(2): 210-215.

表 3 参数 q 对制造商和零售商利润的影响

Tab. 3 The effect of parameter q on profit of manufacturer and retailer

β	q	c	Π_1^H	Π_2^H	Π_0^H	Π_1^L	Π_2^L	Π_0^L
2	1.1	0.5	0.088	0.304	2.475	0.442	0.034	1.601
2	1.2	0.5	0.133	0.392	2.538	0.611	0.044	1.618
2	1.3	0.5	0.186	0.490	2.602	0.806	0.054	1.652
2	1.4	0.5	0.249	0.600	2.666	1.030	0.067	1.702
2	1.5	0.5	0.320	0.720	2.730	1.280	0.080	1.770
2	1.6	0.5	0.401	0.852	2.794	1.558	0.095	1.854
2	1.7	0.5	0.490	0.994	2.858	1.862	0.110	1.956
2	1.8	0.5	0.589	1.148	2.922	2.195	0.128	2.074
2	1.9	0.5	0.696	1.312	2.987	2.554	0.146	2.209

- [12] 张喜征,刘琛,张人龙. 基于可替代产品竞争的双渠道供应链定价与协调[J]. 软科学,2016(3):121-125.
ZHANG X Z, LIU C, ZHANG R L. Pricing strategies and coordination in dual channel supply chain considering the product substitution[J]. Soft Science, 2016(3):121-125.
- [13] HA A, LONG X, NASIRY J. Quality in supply chain encroachment[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2016, 18(2):280-298.
- [14] 周健,陈露婷,唐哲宇. 基于 Stackelberg 博弈的异质品双渠道供应链定价策略[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2016, 44(12):1962-1968.
ZHOU J, CHENG L T, TANG Z Y. Pricing strategies of dual-channel product supply chain based on Stackelberg game[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2016, 44(12):1962-1968.
- [15] 彭岩,刘另. 基于个性化需求的物流服务供应链初探[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版), 2016, 30(11):162-166.
PENG Y, LIU L. Research on individual demand-oriented logistics service supply Chain[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2016, 30(11):162-166.
- [16] DESAI P, KEKRE S, RADHAKRISHNAN S, et al. Product differentiation and commonality in design: balancing revenue and cost drivers[J]. Management Science, 2001, 47(1):37-51.
- [17] SALOP S C. Monopolistic competition with outside goods [J]. The Bell Journal of Economics, 1979, 10(1):141-156.

Operations Research and Cybernetics

Research on Layout and Price Decisions of Heterogeneous Product in Dual Channel Supply Chain

ZHANG Tinglong, GU Zhoufan

(School of Economy and Management, Anhui Normal University, Wuhu Anhui 241000, China)

Abstract: [Purposes] In dual-channel supply chain, how to sell heterogeneous products in direct channel and traditional channel reasonably is a issue to manufacturer. It is of great significance to design product layout in business practice. [Methods] Mathematical models and backward induction were used to research manufacturers' product layouts and pricing when they introduce online channels, and the influence of relevant parameters on layout was studied by numerical analysis. [Findings] Results show that, consumers' acceptance of direct channel, high-end products' quality and cost will influence the strategy of manufacturer's online product layout. When the consumers' acceptance of direct channel and the quality of high-end products are high, the cost is low, manufacturer will choose the layout of high-end products. Otherwise, it will choose another layout. Direct price of manufacturer will increase and retail price of two retailers will decrease with the increase of consumers' acceptance of direct channel. [Conclusions] There is no strict dominant layout strategy for manufacturers, all kinds of factors are supposed to be considered.

Keywords: dual channel; supply chain; heterogeneous product; layout strategy

(责任编辑 黄 颖)

基于贝叶斯纳什均衡的政府补贴过度转移存在性研究^{*}

——以不完全竞争纵向市场为例

陈哲¹, 梁绍东¹, 王雪颖²

(1. 四川大学 商学院, 成都 610065; 2. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】基于贝叶斯纳什均衡理论讨论了不完全竞争纵向市场中政府补贴过度转移的存在性问题。【方法】首先在内生需求的条件下刻画了上游供应商的投标策略和投标价格,进而在一定的补贴强度下证明了在不完全竞争纵向市场中政府补贴上游供应商会导致补贴向下游市场过度转移。【结果】第二价格招投标模型不会对政府补贴过度转移的存在性产生影响。【结论】主要结果不仅在相对较弱的条件下推广了一些经典的理论结果,而且为政府产业政策的制定提供了一些理论依据。

关键词:政府补贴;贝叶斯纳什均衡;不完备竞争;纵向市场;过度转移

中图分类号:O225;F224

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)05-0010-06

1 研究背景

政府补贴(或税收)的过度转移(Over-shifting)一直都被当作产业经济学研究中一个难以解释的奇异现象(Economic curiosity)。近年来经济学家通过研究发现政府补贴过度转移的相关性质不仅可以很好地解释不同类型不完全竞争的福利意义(Welfare implications),也能揭示不完全竞争市场中关于市场需求、供给和市场力(Market power)的一些重要特征。

由于政府补贴(或税收)过度转移在产业经济分析中的独特而重要地位,因此相关研究受到国内外很多学者的长期关注。在理论研究上,Besley等人^[1-3]讨论了古诺模型(Cournot model)中政府税收过度转移存在性的一些充分必要条件。Anderson等人^[4]研究了Bertrand模型中关于差异化产品的政府税收过度转移的存在性问题。Weyl和Fabinger^[5]利用自由通过(Pass-through)过度转移的概念研究了不同形式不完全竞争市场中税收归宿(Tax incidence)问题。

另一方面,一些实证的文章也利用过度转移的概念解释它们关于市场力研究的一些结果。Pless和van Benthem^[6]运用自由通过过度转移的性质比较研究了不同市场的市场力。他们证明了面对吉芬行为(Giffen behavior)时完全竞争市场中也可能存在过度转移;他们也证明了税收显著性(Tax salience)不能用来解释完全竞争市场中过度转移的存在性问题。Dutkowsky和Sullivan^[11]在垄断竞争(Monopolistic competition)的市场条件下,运用弹性需求函数(Constant elasticity demand function)验证了税收的过度转移现象。他们的研究结果在理论上为寻找税收的过度转移提供了一些方法,也为税收政策的制定提供了一些理论支持。

然而在已有的一些理论研究中^[1-4],许多学者在讨论政府补贴(或税收)过度转移的存在性问题的时候,通常假设边际收益曲线(Marginal revenue curve)比需求曲线(Demand curve)更为平坦。显然这个假设条件过于严格,许多需求函数(包括线性需求函数)都不满足这一条件。因此有必要削弱上述严格的假设条件,在较强经济意义的条件下研究不完全竞争纵向市场中政府补贴(或税收)过度转移的存在性问题。

需要指出的是Asker^[7]利用第一价格招投标模型(First price procurement auction)研究了不完全竞争纵向

* 收稿日期:2018-12-29 修回日期:2019-07-16 网络出版时间:2019-09-26 11:24

资助项目:国家自然科学基金(No. 71471122)

第一作者简介:陈哲,男,副教授,博士,研究方向为采购拍卖理论与应用,E-mail: chenzhe@scu.edu.cn;通信作者:王雪颖,女,讲师,E-mail:14702377@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1123.014.html>

市场中的政府补贴对市场参与者福利的影响。该论文的一个主要贡献是在较弱的充分条件(即补贴上游供应商会导致上游生产要素的边际成本下降幅度低于销售价格的下跌幅度)下证明了补贴过度转移的存在性。显然,文献[7]中政府补贴过度转移存在性的充分条件不再需要假设边际收益曲线比需求曲线更为平坦。另一方面,Hansen^[8]研究了带有内生需求(Endogenous demand)的招投标模型,该论文的一个主要贡献在于发现第一价格招投标模型产生的期望交易价格低于第二价格招投标模型产生的期望交易价格。

既然在不完全竞争纵向市场中第一价格招投标模型会导致政府补贴过度转移现象存在,那么人们自然就会提出如下问题:在产生更高期望交易价格的第二价格招投标模型是否会也会导致政府补贴过度转移现象存在;如果该现象存在,是否需要上述过于严格的需求曲线假设?本论文的一个主要目的是试图为上述问题寻找到较为合理的答案。受文献[7-8]研究的启发,本文拟通过第二价格拍卖招投标模型讨论不完全竞争纵向市场中政府补贴过度转移的存在性问题。研究的主要目标是讨论不同的采购机制是否会对政府补贴过度转移的存在性产生影响。

本文的主要结构如下:首先给出所讨论的不完全竞争纵向市场的基本概念、假设和预备知识;然后,在内生需求的条件下讨论上游供应商的投标策略和投标价格;在此基础上,在一个较弱的充分条件下证明政府补贴过度转移的存在;最后总结所获得的主要结果。

2 市场环境与研究假设

本节将建立所研究的不完全竞争纵向市场的基本定义、假设和一些预备知识。此外还将引入第二价格招投标模型和政府补贴等相关概念。

首先假设该不完全竞争纵向市场中包括一些上游供应商、一个中游垄断厂商(Monopolist)以及下游的最终消费者。中游垄断厂商从上游供应商处采购生产原材料(Input),组织生产并将产品(Output)销售给下游消费者。假设政府向上游原材料供应商提供补贴,以鼓励该原材料的生产。由于垄断厂商具有较强的市场力,它不愿意接受已有的市场价格,因此它选择通过招投标方式以期从上游原材料供货商处获得更低的采购价格。本文假设中游垄断厂商采用第二价格招投标的机制从上游供应商处采购原材料。

注1 假设该原材料是无差异的,上游供应商通过单位价格相互竞争;中游垄断厂商只关心采购价格。

假设上游市场中有 n 个供应商参与供应合同的竞标,那么供应商集合即为 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。上游供应商 i 的总成本是由固定成本 θ_i 和变动成本 $\mu_i(q)$ 组成,假定 $\mu_i(q)$ 是可微的且 $\mu'_i(q) > 0, \mu''_i(q) \geq 0; \mu_i(q)$ 是市场参与者均知道的公共知识;而 θ_i 是供应商 i 的私有信息。假设供应商 i 的固定成本 θ_i 是一个随机变量,它独立同分布于函数 $F(\theta)$, 且 $\theta_i \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \subset [0, V(b^*)]$, 其中 $V(b^*) = \max_b q_m(b)b - \mu(q_m(b))$ 。最后所有市场参与者均被假定是风险中性的。

当供应商 i 中标后,它的利润函数是 $\Pi_i = q_m(b)b - \mu_i(q_m(b)) - \theta_i$, 其中 b 是原材料的采购价格, $q_m(b)$ 是原材料的采购数量。对于收益函数 $q_m(b)b$, 有如下假设。

假设1^[7] 原材料的需求函数 $q_m(b)$ 满足性质:1) $q'_m(b) < 0$; 2) $q'_m(b) < -\frac{1}{2}q''_m(b)b$ 。

3 主要结论

3.1 政府补贴前的投标策略分析

已经假设中游垄断厂商采用第二价格招投标机制向上游供应商购买原材料,具体的招标采购过程如下:首先中游垄断厂商对上游供应商提出招标要求;然后供应商响应招标并参与投标;最后垄断厂商确定中标供应商、中标价格和供应数量。假设中游垄断厂商没有金融约束(Financial constraints),可以采购足够多的数量,因此它的采购数量具有内生性。

注2 供应数量受中标价格影响,当中标价格足够低时,垄断厂商也可以采购对应的数量。

由文献[8]的主要结果知,在第二价格招投标机制中,采购数量的内生性不会改变供应商投标策略。因此有如下命题。

命题1 在不完全竞争纵向市场中,当中游垄断厂商采用第二价格招投标机制向上游供应商购买原材料,

那么上游供应商有弱占优投标策略 $b(\theta_i)$, 这里 $b(\theta_i)$ 满足方程:

$$q_m(b(\theta_i))b(\theta_i) - \mu(q_m(b(\theta_i))) = \theta_i. \quad (1)$$

令 θ_1^* 和 θ_2^* 分别是固定成本 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 中最小和次小的随机变量。那么由命题 1 可知, $b(\theta_1^*)$ 和 $b(\theta_2^*)$ 分别为所有报价中的最低价和次低价。显然在不完全竞争纵向市场中垄断厂商的原材料采购价格为 $b(\theta_2^*)$ 。

3.2 政府补贴后的投标策略分析

本节将讨论政府补贴如何影响上游供应商的投标策略和垄断厂商的采购价格。考虑如下 3 种补贴形式: 一次性总额补贴(A lump sum subsidy)、单位补贴(A specific (unit) subsidy)和从价补贴(An ad valorem subsidy); 补贴强度用 t 表示。

第 1 种补贴形式是对供应商进行一次性总额补贴, 补贴后供应商 i 的利润函数变为: $\Pi^l(\theta_i) = q_m(b_i)b_i - \mu(q_m(b_i)) + t - \theta_i$, 其中 t 是一笔固定额度的补贴。

注 3 对于一次性补贴的额度 t , 假设它小于供应商固定成本的最小值, 即 $t < \min_i \theta_i$ 。如果不是, 则 $t > \min_i \theta_i$ 。那么对于固定成本小于 t 的供应商, 他们会投出 $b=0$ 而且必定会获得正利润 $t - \theta$ 。这种情况扭曲了补贴本质。针对从量补贴和从价补贴, 作出相似假设保证 $b > 0$ 。

第 2 种补贴形式是从量(单位)补贴。从量补贴将供应商 i 的利润函数变为: $\Pi^a(\theta_i) = q_m(b_i)(b_i + t) - \mu(q_m(b_i)) - \theta_i$, 其中 t 是对每一单位的补贴额度。

最后考虑的是从价补贴, 它将供应商 i 的利润函数改变成 $\Pi^v(\theta_i) = q_m(b_i)b_i(1+t) - \mu(q_m(b_i)) - \theta_i$, 其中 t 是原材料单位价值的补贴率。

由于所有补贴强度是上游市场的公共知识, 因此这样的政府补贴不会影响上游供应商固定成本的随机分布和上游市场的竞争强度, 那么上游供应商的投标策略就不会因为接受政府补贴而发生变化。所以有如下命题刻画补贴后上游供应商的投标策略。

命题 2 在不完全竞争纵向市场中, 如果中游垄断厂商采用第二价格招投标向上游厂商购买原材料, 当政府对供应商予以一次性总额补贴和从价补贴时, 则供应商 i 将会选择 $\bar{b}(\theta_i)$ 作为他的投标策略, 且 $\bar{b}(\theta_i)$ 满足如下方程:

$$q_m(\bar{b}(\theta_i))\bar{b}(\theta_i) - \mu(q_m(\bar{b}(\theta_i))) = \theta_i - t, \quad (2)$$

$$q_m(\bar{b}(\theta_i))\bar{b}(\theta_i)(1+t) - \mu(q_m(\bar{b}(\theta_i))) = \theta_i. \quad (3)$$

命题 3 在不完全竞争纵向市场中, 如果中游垄断厂商采用第二价格招投标向上游厂商购买原材料, 当政府予以上游供应商从量补贴时, 如果假设采购需求函数 $q_m(b)$ 是凹函数且补贴程度不太大, 则供应商 i 将会选择 $\bar{b}_i(\theta_i)$ 作为他的投标策略, 且 $\bar{b}_i(\theta_i)$ 满足如下方程:

$$q_m(\bar{b}_i(\theta_i))(\bar{b}_i(\theta_i) + t) - \mu(q_m(\bar{b}_i(\theta_i))) = \theta_i. \quad (4)$$

注 4 Asker^[7]也做出了类似的假设以此保证 $q_m(b)(b+t)$ 有唯一的全局最优。

3.3 政府补贴后垄断厂商采购价格

本节将分析政府补贴如何导致原材料采购价格的变化。Asker^[7]指出关于该问题有两种研究框架: 一种是通过计算补贴前后原材料期望交易价格的差额, 分析原材料采购价格的变化情况; 另一种是将供应商成本在內的相关信息固化为拍卖机制产生的常数, 通过计算补贴变化分析原材料采购价格的变化。为了方便与 Asker^[7]中相关结果的比较, 本文将采用 Asker^[7]中的分析方法讨论政府补贴如何导致原材料采购价格的变化。为了简化起见, 令 $b(\theta_i) \equiv b_i$, $\bar{b}(\theta_i) \equiv \bar{b}_i$ 和 $b(\theta_2^*) \equiv b_2^*$, $\bar{b}(\theta_2^*) \equiv \bar{b}_2^*$ 。

命题 4 在不完全竞争纵向市场中, 如果中游垄断厂商采用第二价格招投标向上游厂商购买原材料, 当政府对供应商予以一次性总额补贴和从价补贴时, 供应商的投标价和垄断厂商的采购价格都会因政府补贴存在而下降。

证明 首先讨论一次性总额补贴。因为该补贴的额度是公共知识, 所以政府补贴将供应商固定成本的影响是相同的。由命题 1 可知, 价值函数 $V = q_m(b)b - \mu(q_m(b))$ 在区间 $[0, b^*]$ 内连续且严格单调递增。因此对供应商 i , 存在 $\bar{b}_i \in [0, b^*]$ 使得 $q_m(\bar{b}_i)\bar{b}_i - \mu(q_m(\bar{b}_i)) = \theta_i - t$ 。通过(1)式有 $q_m(b_i)b_i - \mu(q_m(b_i)) = \theta_i$ 。

显然 $\theta_i - t < \theta_i$, 因此有 $\bar{b}_i < b_i$ 。这就是说上游供应商 i 的投标价因政府补贴的存在而降低。从命题 1 知道垄断厂商在没有政府补贴的前提下采购上游原材料的价格为 b_2^* 。不失一般性, 令上游供应商 k 的投标价等于 b_2^* ,

即:

$$b_k = b_2^n. \quad (5)$$

因为供应商 k 接受补贴后其投标价也是下降的,即:

$$\bar{b}_k < b_k. \quad (6)$$

由于补贴没有改变供应商之间的竞争强度;补贴的强度对上游供应商而言是公共知识;那么供应商 k 的投标价也是补贴后市场中的第二低投标价,即:

$$\bar{b}_k = \bar{b}_2^n, \quad (7)$$

其中 \bar{b}_2^n 是补贴后的投标价 $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ 中的第二低投标价。通过(5)~(7)式推导出 $\bar{b}_2^n < b_2^n$,显然中游垄断厂商的采购价格因为一次性补贴的存在而降低。

当政府予以从价补贴时,函数 V 变为 $q_m(b)b(1+t) - \mu(q_m(b_i))$ 。余下分析与一次性补贴的分析类似,仅仅是收益乘以 $(1+t)$ 。函数 $V = q_m(b)b(1+t) - \mu(q_m(b_i))$ 在区间 $[0, b^*]$ 内连续且严格单调递增。所以对供应商 i , 存在 $\bar{b}_i \in [0, b^*]$ 使得 $q_m(\bar{b}_i)\bar{b}_i - \mu(q_m(\bar{b}_i)) = \theta_i - q_m(\bar{b}_i)\bar{b}_i t$ 。再由(1)式可得 $q_m(b_i)b_i - \mu(q_m(b_i)) = \theta_i$ 。

因为 $q_m(b)b - \mu(q_m(b))$ 是单调递增函数,所以 $\bar{b}_i < b_i$ 。显然供应商 i 的投标价因为从价补贴而减少。与一次性补贴证明类似,得到中游垄断厂商的采购价格因为从价补贴而降低。证毕

命题 5 如果命题 3 中假设成立,当政府予以上游供应商从量补贴时,那么上游供应商的投标价和垄断厂商的采购价格均都因政府补贴存在而下降。

证明 当政府予以从量补贴时,函数 V 变为 $q_m(b)(b+t) - \mu(q_m(b_i))$ 。由命题 3 的证明可知,函数 $V = q_m(b)(b+t) - \mu(q_m(b_i))$ 在区间 $[0, \bar{b}^*]$ 内连续且严格单调递增。对供应商 i , 存在 $\bar{b}_i \in [0, \bar{b}^*]$ 使得 $q_m(\bar{b}_i)\bar{b}_i - \mu(q_m(\bar{b}_i)) = \theta_i - q_m(\bar{b}_i)t$ 。由(1)式可得 $q_m(b_i)b_i - \mu(q_m(b_i)) = \theta_i$ 。

由函数 $q_m(b)b - \mu(q_m(b))$ 严格单调递增可以推出 $\bar{b}_i < b_i$ 。因此供应商 i 的投标价因从量补贴而降低。与命题 4 的证明类似,可以得到中游垄断厂商的采购价格因为从量补贴而降低。证毕

关于上述价格变化的结果,有如下直观的经济解释:在第二价格招投标机制中,上游供应商的弱占优投标策略事实上是一个零利润的投标策略。由于政府补贴后该弱占优投标策略不会发生变化,因此补贴后上游供应商的弱占优投标策略事实上也是一个零利润的投标策略。为了抵消政府补贴的影响和遵守弱占优投标策略,上游供应商获得补贴后的最优选择是降低投标价格。而这一选择也将导致垄断厂商的采购价格随之下降。

3.4 政府补贴过度转移的经济分析

本节将讨论不完全竞争纵向市场中政府补贴过度转移的存在性问题并分析政府补贴过度转移存在性的经济意义。

命题 6 在不完全竞争纵向市场中,如果中游垄断厂商采用第二价格招投标向上游厂商购买原材料,只要补贴强度没有超过上游供应商的最低固定成本那么市场中必然会出现政府补贴的过度转移现象,即补贴引起采购价格的下降幅度会超过补贴本身的强度。上述结论按不同情形即为:1) 当政府对上游供应商予以一次性补贴时,有 $b_2^n - \bar{b}_2^n > \frac{t}{q_m(b_2^n)}$; 2) 当政府对上游供应商予以从价补贴时,有 $b_2^n - \bar{b}_2^n > \bar{b}_2^n t$; 3) 当政府对上游供应商予以从量补贴时,有 $b_2^n - \bar{b}_2^n > t$ 。

证明 假设供应商 i 中标赢得供应合同,补贴前垄断厂商的采购价格是 b_2^n 。不失一般性,假设供应商 k 的投标价等于采购价格,即 $b_k = b_2^n$ 。因为供应商的投标策略和固定成本的分布没有发生变化,则补贴之后垄断厂商的采购价格是 $\bar{b}_k = \bar{b}_2^n$,其中 \bar{b}_k 是供应商 k 在补贴之后的投标价。

当政府予以一次性补贴时,令 $\bar{V}_k = q_m(\bar{b}_k)\bar{b}_k - \mu(q_m(\bar{b}_k)) + t$ 和 $V_k = q_m(b_k)b_k - \mu(q_m(b_k))$ 。命题 4 的证明可以推出 $\bar{V}_k = V_k$,即:

$$q_m(b_k)b_k - \mu(q_m(b_k)) = q_m(\bar{b}_k)\bar{b}_k - \mu(q_m(\bar{b}_k)) + t = (q_m(b_k) + \Delta q)\bar{b}_k - \mu(q_m(b_k)) - \Delta\mu(\Delta q) + t. \quad (8)$$

其中 $\Delta\mu(\Delta q)$ 是引入补贴后数量增加引起的变动成本变化量。通过(2)式可得 $q_m(\bar{b}_k)\bar{b}_k - \mu(q_m(\bar{b}_k)) = \theta_k - t > 0$ 。

等式两边同时除以 $q_m(\bar{b}_k)$ 有 $\bar{b}_k - \frac{\mu(q_m(\bar{b}_k))}{q_m(\bar{b}_k)} = \frac{\theta_k - t}{q_m(\bar{b}_k)} > 0$ 和

$$\Delta q \bar{b}_k - \Delta\mu(\Delta q) > 0. \quad (9)$$

结合(8),(9)式有 $q_m(b_k)b_k - \mu(q_m(b_k)) > q_m(b_k)\bar{b}_k - \mu(q_m(b_k)) + t$ 和 $b_k - \bar{b}_k > \frac{t}{q_m(b_k)}$ 。

因此,不管哪个供应商实际中标赢得供应合同,存在 $b_2^n - \bar{b}_2^n > \frac{t}{q_m(b_2^n)}$,说明一次性补贴后该不完全竞争纵向市场中存在着政府补贴过度转移。

当政府予以从价补贴时,令 $\bar{V}_k = q_m(\bar{b}_k)\bar{b}_k(1+t) - \mu(q_m(\bar{b}_k)) + t$ 和 $V_k = q_m(b_k)b_k - \mu(q_m(b_k))$ 。命题 4 的证明显示 $\bar{V}_k = V_k$,即:

$$q_m(b_k)b_k - \mu(q_m(b_k)) = q_m(\bar{b}_k)\bar{b}_k(1+t) - \mu(q_m(\bar{b}_k)) = q_m(b_k)\bar{b}_k(1+t) + \Delta q\bar{b}_k(1+t) - \mu(q_m(b_k)) - \Delta\mu(\Delta q)。 (10)$$

通过(3)式得到 $q_m(\bar{b}_k)\bar{b}_k(1+t) - \mu(q_m(\bar{b}_k)) = \theta_k > 0$ 。显然有 $\bar{b}_k(1+t) - \frac{\mu(q_m(\bar{b}_k))}{q_m(\bar{b}_k)} = \frac{\theta_k}{q_m(\bar{b}_k)} > 0$ 和

$$\Delta q\bar{b}_k(1+t) - \Delta\mu(\Delta q) > 0。 (11)$$

结合(10),(11)式有 $q_m(b_k)b_k > q_m(b_k)\bar{b}_k(1+t)$ 。

进一步得到 $b_k - \bar{b}_k > \bar{b}_k t$ 。因此,不管哪个供应商最后中标赢得供应合同,都有 $b_2^n - \bar{b}_2^n > \bar{b}_2^n t$,说明从价补贴后该不完全竞争纵向市场中存在着政府补贴过度转移。

当政府予以从量补贴,令 $\bar{V}_k = q_m(\bar{b}_k)(\bar{b}_k + t) - \mu(q_m(\bar{b}_k))$ 和 $V_k = q_m(b_k)b_k - \mu(q_m(b_k))$ 。通过命题 4 的证明得到 $\bar{V}_k = V_k$,即:

$$q_m(b_k)b_k - \mu(q_m(b_k)) = q_m(\bar{b}_k)(\bar{b}_k + t) - \mu(q_m(\bar{b}_k)) = q_m(b_k)(\bar{b}_k + t) + \Delta q(\bar{b}_k + t) - \mu(q_m(b_k)) - \Delta\mu(\Delta q)。 (12)$$

通过(4)式有 $q_m(\bar{b}_k)(\bar{b}_k + t) - \mu(q_m(\bar{b}_k)) = \theta_k$ 。

进一步可得 $\bar{b}_k + t - \frac{\mu(q_m(\bar{b}_k))}{q_m(\bar{b}_k)} = \frac{\theta_k}{q_m(\bar{b}_k)}$ 和

$$\Delta q(\bar{b}_k + t) - \Delta\mu(\Delta q) > 0。 (13)$$

结合(12),(13)式得到 $b_k - \bar{b}_k > t$ 。

因此,不管哪个供应商最后中标赢得供应合同,都有 $b_2^n - \bar{b}_2^n > t$,说明从量补贴后该不完全竞争纵向市场中存在着政府补贴过度转移。 证毕

由命题 6 知,当政府分别对上游供应商予以 3 种方式的补贴,那么该不完全竞争纵向市场中必然会出现补贴过度转移现象。显然,上述补贴过度转移存在性的充分条件比已知的不完全竞争市场中的补贴(或税收)过度转移存在性的充分条件更为弱化。

在不完全竞争市场中,补贴(或税收)过度转移一般是不会产生的,除非边际收益曲线比需求曲线更平坦^[4,9-10]。本文中,补贴过度转移的产生不依赖于上述严格的假设条件。Asker^[7]基于第一价格投标模型研究了补贴过度转移现象,发现当补贴导致新增原材料的收益超过新增原材料的生产成本时,市场中会发生补贴过度转移现象。显然本文中补贴过度转移存在的充分条件相比 Asker 的充分条件更弱。关于上述结论,有如下直观的阐释。

在第二价格招投标机制下,上游供应商存在零利润的弱占优投标策略。通过供应商的投标策略(例如(2)式)推导出 $\bar{b}(\theta_i) - \frac{\mu(q_m(\bar{b}(\theta_i)))}{q_m(\bar{b}(\theta_i))} = \frac{\theta_i - t}{q_m(\bar{b}(\theta_i))} > 0$,当 $\theta_i - t > 0$ 。那么只要补贴水平不太大,上游供应商的投标价会超过它的平均成本,从而使得补贴后新增原材料的收益大于生产它们的成本,因此补贴过度转移就会在市场中出现。另一方面,从数学角度可知上游供应商的投标策略表明投标价是一些非线性方程的解,那么投标价的变化也是非线性的。因此可以得到纵向不完全竞争市场中政府补贴过度转移是由第二价格招投标机制中最优投标策略以及该策略的非线性变化等性质共同决定的这一结论。

4 总结

本文主要基于贝叶斯纳什均衡理论研究了不完全竞争纵向市场中政府补贴上游供应商对中游垄断厂商原材料采购价格的影响。在内生需求的条件下得到了上游供应商的投标策略,证明了原材料的交易价格因为补贴的存在而下降。在此基础之上证明了在不完全竞争纵向市场中只要政府补贴强度不是足够大,那么政府补贴上

游供应商会导致补贴过度转移现象存在。本文的主要结果不仅在相对较弱的条件下推广了一些经典的理论结果,而且为政府产业政策的制定提供了一些理论依据。

参考文献:

- [1] BESLEY T. Commodity taxation and imperfect competition: a note on the effects of entry[J]. *Journal of Public Economics*, 1989, 40(3): 359-367.
- [2] KATZ M L, ROSEN H S. Tax analysis in an oligopoly model[J]. *Public Finance Quarterly*, 1985, 13(1): 3-20.
- [3] STERN N. The effects of taxation, price control and government contracts in oligopoly and monopolistic competition[J]. *Journal of Public Economics*, 1987, 32(2): 133-158.
- [4] ANDERSON S P, de PALMA A, KREIDER B. Tax incidence in differentiated product oligopoly [J]. *Journal of Public Economics*, 2001, 81(2): 173-192.
- [5] WEYL E G, FABINGER M. Pass-through as an economic tool: principles of incidence under imperfect competition [J]. *Journal of Political Economy*, 2013, 121(3): 528-583.
- [6] PLESS J, Van BENTHEM A. The surprising pass-through of solar subsidies[J]. *Social Science Electronic Publishing*, 2017.
- [7] ASKERA J. Subsidizing (and taxing) business procurement [J]. *Journal of Public Economics*, 2008, 92(7): 1629-1643.
- [8] HANSEN R G. Auctions with endogenous quantity [J]. *Rand Journal of Economics*, 1988, 19(1): 44-58.
- [9] DELIPALLA S, KEEN M. The comparison between ad valorem and specific taxation under imperfect competition [J]. *Journal of Public Economics*, 1998, 49(3): 351-367.
- [10] KEEN M. The balance between specific and ad valorem taxation [J]. *Fiscal Studies*, 1998, 19(1): 1-37.
- [11] DUTKOWSKY D H, SULLIVAN R S. Excise taxes, consumer demand, over-shifting, and tax revenue [J]. *Public Budgeting & Finance*, 2015, 34(3): 111-125.

Operations Research and Cybernetics

The Study on Existence of Government Subsidy Over-shifting via Bayesian Nash Equilibrium: A Case of Imperfectly Competitive Vertical Markets

CHEN Zhe¹, LIANG Shaodong¹, WANG Xueying²

(1. Business School, Sichuan University, Chengdu 610065;

2. School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The existence of government subsidy is studied over-shifting in imperfectly competitive vertical markets via Bayesian Nash equilibrium. [Methods] Under endogenous demands, the bidding strategies of upstream suppliers are characterized in the auction and the bidding prices of upstream suppliers are reduced after subsidization. Moreover, the existence of government subsidy is demonstrated over-shifting in imperfectly competitive vertical markets under some mild conditions. [Findings] The government subsidy overshifting is not changed by the second-price auction. [Conclusions] The main results extend some classical results in literature to more economically reasonable cases.

Keywords: government subsidy; second-price procurement auction; imperfective competition; vertical market; over-shifting

(责任编辑 黄颖)

求解随机变分不等式问题的修正外梯度随机逼近算法*

张小娟, 杜学武

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究求解随机变分不等式问题的基于外梯度的随机逼近算法。【方法】依据求解经典变分不等式问题的外梯度算法,给出求解随机变分不等式问题的修正外梯度随机逼近算法。【结果】在适当的假设下,证明了修正外梯度随机逼近算法具有全局收敛性,初步的数值试验结果表明算法具有有效性。【结论】修正外梯度随机逼近算法是对已有的外梯度随机逼近算法的进一步推广,并且可在更弱的假设下获得它们的全局收敛性结果。

关键词:随机变分不等式;随机逼近;外梯度算法;全局收敛性

中图分类号:O224; O221.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)05-0016-06

众所周知,变分不等式(VI)问题已被广泛应用于经济管理、供应链网络、交通运输、博弈论等领域^[1-2]。在现实生活中,很多问题都会涉及随机因素。因此,近些年来许多研究者开始关注对随机变分不等式(SVI)问题的研究。本文考虑SVI问题:找 $x^* \in X$,使得:

$$(x - x^*)^T F(x^*) \geq 0, \forall x \in X, \quad (1)$$

其中 $X \subset \mathbf{R}^n$ 是一个非空闭凸集, F 是 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的一个映射,且 $F(x) := E[f(x, \xi)]$, 这里 $\xi \in \Omega$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 中的随机变量, $f(x, \xi)$ 是一个连续映射, E 表示数学期望。

求解问题(1)的常用方法主要有两类:样本均值逼近(SAA)^[3]和随机逼近(SA)^[4-9]。这两类方法均基于用样本点逼近原问题,但SA方法每次迭代所需的样本个数少,且数值表现优于SAA方法。因此,本文主要考虑求解问题(1)的SA方法。最近Kannan等人^[7]提出了求解问题(1)的基于外梯度的SA方法,该方法在假设 F 伪单调加并且 F 有界或者 Lipschitz 连续的条件下依概率1收敛。Iusem等人^[8]采用每次迭代选取若干个样本点修正外梯度算法,获得了在 F 伪单调并且 Lipschitz 连续的条件下依概率1收敛的理论结果。进一步地, Iusem等人^[9]又在文献[8]的基础上对算法加入线搜索技术,获得了和文献[8]一样的理论收敛性和更好的收敛率结果。

本文受文献[7,9]中研究工作的启发,给出求解随机变分不等式问题(1)的修正外梯度随机逼近算法,在更弱的假设下,证明算法的全局收敛性,并对文献[10]中的算例进行数值试验,从而验证算法的有效性。

1 预备知识

定义 1^[1] 设 X 是 \mathbf{R}^n 中的非空闭凸集, $y \in \mathbf{R}^n$ 。定义 $\Pi_X[y] := \arg \min\{\|x - y\| : x \in X\}$ 为点 y 在集合 X 上的投影。

定义 2^[1] 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $\alpha > 0$, 定义 $r_\alpha(x) := \|x - \Pi_X[x - \alpha F(x)]\|$ 为问题(1)的自然残差函数。当 $\alpha = 1$ 时,自然残差函数简记为 $r(x)$ 。

引理 1^[1] x^* 是问题(1)的解,当且仅当对任意 $\alpha > 0$ 有 $x^* = \Pi_X[x^* - \alpha F(x^*)]$ 。

引理 2^[1] 给定 $x \in \mathbf{R}^n$, 函数 $\alpha \mapsto \frac{r_\alpha(x)}{\alpha}$ 在区间 $(0, \infty)$ 上是不增的。

引理 3^[1] 设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 是一个非空闭凸集,则:1) 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 有 $\|\Pi_X(x) - \Pi_X(y)\| \leq \|x - y\|$; 2) 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in X$, 有 $(x - \Pi_X(x))^T (y - \Pi_X(x)) \leq 0$; 3) 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in X$, $\|\Pi_X(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 -$

* 收稿日期:2018-10-09 修回日期:2019-05-13 网络出版时间:2019-09-26 11:24

资助项目:重庆市自然科学基金(No. cstc2017jcyjA0788)

第一作者简介:张小娟,女,研究方向为数学规划理论与算法, E-mail: 1143182877@qq.com; 通信作者:杜学武,男,教授,博士, E-mail: 508677034@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1124.036.html>

$\| \Pi_X(x) - x \|^2$ 。

引理 4^[11] 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}^n, \lambda \in (0, 1)$, 有:

$$\| \lambda x + (1-\lambda)y \|^2 = \lambda \| x \|^2 + (1-\lambda) \| y \|^2 - \lambda(1-\lambda) \| x - y \|^2$$

成立。

命题 1^[12] 设 $\{\nu_k\}, \{\omega_k\}, \{a_k\}, \{b_k\}$ 均为适应于 σ 代数流 $\{\mathcal{F}_k\}$ 的可积非负随机序列, 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$,

并且对任意的 $k \in \mathbf{N}, E[\nu_{k+1} | \mathcal{F}_k] \leq (1+a_k)\nu_k - \omega_k + b_k$ 依概率 1 成立, 则 $\{\nu_k\}$ 依概率 1 收敛, 并且 $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k < \infty$ 依概率 1 成立。

2 算法及其收敛性

求解经典 VI 问题的外梯度算法已经发展得比较成熟, 但是, 对于求解 SVI 问题的外梯度算法, 人们研究得却很少。Censor 等人^[13] 给出了求解经典 VI 问题的一类修正外梯度算法, 其中将 $k+1$ 步的迭代点取为第 k 步和矫正步的迭代点的凸组合。为了充分利用已有迭代点的信息以提高算法的有效性, 本文结合文献[7, 13]中的迭代格式和文献[9]中的线搜索策略, 提出求解问题(1)的一类修正外梯度随机逼近(Modified extragradient stochastic approximation, MESA)算法。下面给出 MESA 算法的具体步骤。

MESA 算法 初始步, 选取初始点 $x^0 \in \mathbf{R}^n, \gamma > 0, \theta \in (0, 1), \mu \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 令 $k := 0$ 。

步骤 1, 给定 x^k , 取来自 Ω 的样本点 ξ^k , 若 $x^k = \Pi_X[x^k - f(x^k, \xi^k)]$ 则停止; 否则转步骤 2。

步骤 2, 对于 $\alpha \in (0, \infty)$, 定义 $y^k(\alpha) := \Pi_X[x^k - \alpha f(x^k, \xi^k)]$ 。找 $\alpha_k = \gamma \theta^{l_k}$, 其中 l_k 是使得下式立的最小非负整数:

$$\gamma \theta^{l_k} \| f(x^k, \xi^k) - f(y^k(\gamma \theta^{l_k}), \xi^k) \| \leq \mu \| x^k - y^k(\gamma \theta^{l_k}) \|。 \quad (2)$$

记 $y^k = y^k(\alpha_k) = \Pi_X[x^k - \alpha_k f(x^k, \xi^k)]$ 。产生 Ω 的样本点 η^k , 计算 $t^k = \Pi_X[x^k - \alpha_k f(y^k, \eta^k)]$ 。选取 $\delta \in (0, 1)$, 计算:

$$x^{k+1} = \delta x^k + (1-\delta)t^k, \quad (3)$$

令 $k := k+1$, 转步骤 1。

MESA 算法中的 ξ^k 和 η^k 是来自随机变量 ξ 的独立同分布样本。下面考虑由 MESA 算法产生的序列 $\{x^k\}$ 的收敛性。关于随机过程 $\{x^k\}$ 的 σ 代数流为 $\mathcal{F}_k = \sigma(x^0, \xi^0, \dots, \xi^{k-1}, \eta^0, \dots, \eta^{k-1}), \hat{\mathcal{F}}_k = \sigma(x^0, \xi^0, \dots, \xi^{k-1}, \xi^k, \eta^0, \dots, \eta^{k-1})$ 。定义 $\varepsilon_1^k := f(x^k, \xi^k) - F(x^k), \varepsilon_2^k := f(y^k, \eta^k) - F(y^k), \varepsilon_3^k := f(y^k, \xi^k) - F(y^k)$ 是由 MESA 算法产生的随机误差。

为了获得 MESA 算法的收敛性, 需要下面的假设。

假设 1 问题(1)的解集 X^* 非空。

假设 2 存在非负随机变量 $\mathcal{L}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$, 满足 $E[\mathcal{L}(\xi)] < \infty, \mathcal{L}(\xi) \geq 1, \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \| f(x, \xi) - f(y, \xi) \| \leq \mathcal{L}(\xi) \| x - y \|$, 依概率 1 成立。

假设 3 对任意的 $x^* \in X$, 有 $(x - x^*)^T F(x) \geq 0, \forall x \in X$ 。

假设 4 误差 $\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \varepsilon_3^k$ 满足: 1) $E[\varepsilon_1^k | \mathcal{F}_k] = 0, E[\varepsilon_2^k | \hat{\mathcal{F}}_k] = 0$; 2) $\sum_{k=0}^{\infty} E[\| \varepsilon_1^k \|^2 | \mathcal{F}_k] < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} E[\| \varepsilon_2^k \|^2 | \mathcal{F}_k] < \infty,$

$\sum_{k=0}^{\infty} E[\| \varepsilon_3^k \|^2 | \mathcal{F}_k] < \infty$ 成立。

假设 2 是文献[9]中的 Hölder 连续假设的一个特例, 假设 3 弱于文献[7]中的伪单调加假设和文献[9]中的伪单调假设, 假设 4 是 SA 方法中的基本假设, 它要求随机误差具有无偏性和方差具有可控性。

为了叙述方便, 定义 $A_k := (1-3\mu^2)\gamma^2 \| \varepsilon_1^k \|^2 + 3\gamma^2 \| \varepsilon_2^k \|^2 + 3\gamma^2 \| \varepsilon_3^k \|^2, B_k := \frac{1}{2}(1-\delta)(1-3\mu^2)\alpha_k^2$ 在给出 MESA 算法的收敛性之前, 先证明引理 5 和引理 6。下面的引理 5 给出了与随机误差有关的一个递推关系。

引理 5 在假设 1~3 成立的条件下, 若 MESA 算法在第 k 步不终止, 则对任意 $x^* \in X^*$, 由 MESA 算法产

生的序列 $\{x^k\}$ 满足

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - B_k r^2(x^k) + A_k - 2\alpha_k(1-\delta)(y^k - x^*)^\top \epsilon_2^k. \quad (4)$$

证明 由引理 3 得到:

$$\begin{aligned} \|t^k - x^*\|^2 &= \|\Pi_X[x^k - \alpha_k f(y^k, \eta^k)] - x^*\|^2 \leq \\ &\|(x^k - \alpha_k f(y^k, \eta^k)) - x^*\|^2 - \|\Pi_X[x^k - \alpha_k f(y^k, \eta^k)] - (x^k - \alpha_k f(y^k, \eta^k))\|^2. \end{aligned}$$

由假设 3 及 ϵ_2^k 的定义得到:

$$\begin{aligned} \|t^k - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|(x^k - y^k) - (t^k - y^k)\|^2 - 2\alpha_k(t^k - y^k)^\top f(y^k, \eta^k) - 2\alpha_k(y^k - x^*)^\top \epsilon_2^k \leq \\ &\|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - t^k\|^2 + 2\alpha_k(t^k - y^k)^\top (f(x^k, \xi^k) - f(y^k, \eta^k)) - 2\alpha_k(y^k - x^*)^\top \epsilon_2^k. \end{aligned}$$

通过均值不等式得:

$$\|t^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - 2\alpha_k(y^k - x^*)^\top \epsilon_2^k + \alpha_k^2 \|f(x^k, \xi^k) - f(y^k, \eta^k)\|^2. \quad (5)$$

由不等式 $(\sum_{i=1}^3 a_i)^2 \leq 3 \sum_{i=1}^3 a_i^2$ 和(2)式以及 $\alpha_k \in (0, \gamma)$, 得到:

$$\begin{aligned} &\alpha_k^2 \|f(x^k, \xi^k) - f(y^k, \eta^k)\|^2 \leq \\ &\alpha_k^2 (\|f(x^k, \xi^k) - f(y^k, \xi^k)\| + \|f(y^k, \xi^k) - F(y^k)\| + \|F(y^k) - f(y^k, \eta^k)\|)^2 \leq \\ &3\alpha_k^2 \|f(x^k, \xi^k) - f(y^k, \xi^k)\|^2 + 3\alpha_k^2 \|f(y^k, \eta^k) - F(y^k)\|^2 + 3\alpha_k^2 \|f(y^k, \xi^k) - F(y^k)\|^2. \end{aligned}$$

因此:

$$\alpha_k^2 \|f(x^k, \xi^k) - f(y^k, \eta^k)\|^2 \leq 3\mu^2 \|x^k - y^k\|^2 + 3\gamma^2 \|\epsilon_2^k\|^2 + 3\gamma^2 \|\epsilon_3^k\|^2. \quad (6)$$

由 ϵ_1^k 得到 $y^k = \Pi_X[x^k - \alpha_k f(x^k, \xi^k)] = \Pi_X[x^k - \alpha_k (F(x^k) + \epsilon_1^k)]$. 根据引理 2、引理 3 以及 $\alpha_k \in (0, \gamma)$ 得:

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 r^2(x^k) &\leq r_{\alpha_k}^2(x^k) = \|x^k - \Pi_X[x^k - \alpha_k F(x^k)]\|^2 = \|(x^k - y^k) + (y^k - \Pi_X[x^k - \alpha_k F(x^k)])\|^2 \leq \\ &2\|x^k - y^k\|^2 + 2\|\Pi_X[x^k - \alpha_k (F(x^k) + \epsilon_1^k)] - \Pi_X[x^k - \alpha_k F(x^k)]\|^2 \leq 2\|x^k - y^k\|^2 + 2\gamma^2 \|\epsilon_1^k\|^2. \end{aligned}$$

因此:

$$\|x^k - y^k\|^2 \geq \frac{\alpha_k^2}{2} r^2(x^k) - \gamma^2 \|\epsilon_1^k\|^2. \quad (7)$$

结合(6)~(7)式,得:

$$\begin{aligned} \|x^k - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\alpha_k^2(1-3\mu^2)}{2} r(x^k)^2 - 2\alpha_k(y^k - x^*)^\top \epsilon_2^k + \\ &(1-3\mu^2)\gamma^2 \|\epsilon_1^k\|^2 + 3\gamma^2 \|\epsilon_2^k\|^2 + 3\gamma^2 \|\epsilon_3^k\|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

由(3)式、(8)式、引理 4 和 $\delta \in (0, 1)$, 得到:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|\delta x^k + (1-\delta)t^k - x^*\|^2 = \|\delta(x^k - x^*) + (1-\delta)(t^k - x^*)\|^2 \leq \\ &\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1-\delta)\|t^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\alpha_k^2(1-\delta)(1-3\mu^2)}{2} r(x^k)^2 - 2(1-\delta)\alpha_k(y^k - x^*)^\top \epsilon_2^k + \\ &(1-3\mu^2)\gamma^2 \|\epsilon_1^k\|^2 + 3\gamma^2 \|\epsilon_2^k\|^2 + 3\gamma^2 \|\epsilon_3^k\|^2. \end{aligned}$$

根据 A_k, B_k 定义有 $\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - B_k r(x^k)^2 + A_k - 2(1-\delta)\alpha_k(y^k - x^*)^\top \epsilon_2^k$ 成立。证毕

因为线搜索步长 α_k 的取值与样本点有关,所以需要寻找 α_k 的下界。下面的引理 6 就表明,步长 α_k 的取值要么是 γ , 要么是 Lipschitz 常数下界的一个无偏随机估计。引理 6 的证明参考了文献[9]中引理 4, 引理 5 的证明过程。

引理 6 在假设 2 成立的条件下,若 MESA 算法在 k 步不终止,则 $\alpha_k \geq \min\left\{\frac{\mu\theta}{\mathcal{L}(\xi^k)}, \gamma\right\}$ 依概率 1 成立,并且有

$$E[\alpha_k | \mathcal{F}_k] \geq \frac{1}{L} \min\{\mu\theta, \gamma\} \text{ 成立, 其中 } L := E[\mathcal{L}(\xi)].$$

证明 如果 $\alpha_k = \gamma$ 满足(2)式,则 $\alpha_k = \gamma$; 如果 $\alpha_k = \gamma$ 不满足(2)式,则有 $\theta^{-1}\alpha_k \|f(x^k, \xi^k) - f(y^k(\theta^{-1}\alpha_k), \xi^k)\| > \mu \|x^k - y^k(\theta^{-1}\alpha_k)\|$ 。由假设 2 得:

$$\|f(x^k, \xi^k) - f(y^k(\theta^{-1}\alpha_k), \xi^k)\| \leq \mathcal{L}(\xi^k) \|x^k - y^k(\theta^{-1}\alpha_k)\|。$$

故可得到 $\alpha_k \geq \frac{\mu\theta}{\mathcal{L}(\xi^k)}$ 。通过上述讨论可知 $\alpha_k \geq \min\left\{\gamma, \frac{\mu\theta}{\mathcal{L}(\xi^k)}\right\}$ 依概率 1 成立。由假设 2 知, $\mathcal{L}(\xi^k) \geq 1$ 依概率 1 成立,从而有 $\alpha_k \mathcal{L}(\xi^k) \geq \min\{\mu\theta, \gamma\}$ 依概率 1 成立,故:

$$\min\{\mu\theta, \gamma\} \leq E[\alpha_k \mathcal{L}(\xi^k) | \mathcal{F}_k] \leq E[\alpha_k | \mathcal{F}_k] E[\mathcal{L}(\xi^k) | \mathcal{F}_k] = LE[\alpha_k | \mathcal{F}_k], E[\alpha_k | \mathcal{F}_k] \geq \frac{1}{L} \min\{\gamma, \theta\mu\}$$

成立。

证毕

下面给出 MESA 算法的收敛性结果。

定理 1 在假设 1~4 成立的条件下, MESA 算法要么有限步终止(如第 k 步终止, 则 x^k 为问题(1)的解), 要么产生一个无穷序列 $\{x^k\}$, 满足: 1) $\{x^k\}$ 依概率 1 有界; 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} r^2(x^k) = 0$; 3) $\{x^k\}$ 的每个聚点 \bar{x} 均依概率 1 为问题(1)的解; 4) $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x^k, X^*) = 0$ 依概率 1 成立, 其中 $d(\cdot, \cdot)$ 表示距离。

证明 若 MESA 算法在第 k 步终止, 则有 $x^k = \Pi_X[x^k - \alpha_k f(x^k, \xi^k)]$, 由引理 1 知:

$$(x - x^k)^\top f(x^k, \xi^k) \geq 0, \forall x \in X. \tag{9}$$

由 $x^k \in \mathcal{F}_k, \xi^k$ 与 \mathcal{F}_k 独立, 得到 $E[f(x^k, \xi^k) | \mathcal{F}_k] = F(x^k)$ 。对(9)式取 $E[\cdot | \mathcal{F}_k]$, 得到 $(x - x^k)^\top F(x^k) \geq 0, \forall x \in X$, 所以 $x^k \in X^*$ 。

若 MESA 算法不在有限步终止, 则产生一个无穷序列 $\{x^k\}$ 。由引理 6, $E[\cdot | \mathcal{F}_k] = E[E[\cdot | \hat{\mathcal{F}}_k] | \mathcal{F}_k]$ 和假设 4, 并对(9)式取 $E[\cdot | \mathcal{F}_k]$, 得到:

$$\begin{aligned} E[\|x^{k+1} - x^*\|^2 | \mathcal{F}_k] &\leq \|x^k - x^*\|^2 + E[A_k | \mathcal{F}_k] - 2(1-\delta)E[\alpha_k | \mathcal{F}_k] \cdot \\ &E[(y^k - x^*) | \mathcal{F}_k]^\top E[E[\epsilon_2^k | \hat{\mathcal{F}}_k] | \mathcal{F}_k] - E[B_k | \mathcal{F}_k] r^2(x^k) = \\ &\|x^k - x^*\|^2 - E[B_k | \mathcal{F}_k] r^2(x^k) + E[A_k | \mathcal{F}_k] + E[A_k | \mathcal{F}_k] = \\ &\|x^k - x^*\|^2 - \frac{1}{2}(1-\delta)(1-3\mu^2)E[\alpha_k^2 | \mathcal{F}_k] r^2(x^k) + E[A_k | \mathcal{F}_k] \leq \\ &\|x^k - x^*\|^2 - \frac{1}{2L^2}(1-\delta)(1-3\mu^2)(\min\{\theta\mu, \gamma\})^2 r^2(x^k) + E[A_k | \mathcal{F}_k]. \end{aligned}$$

记 $\nu_k := \|x^k - x^*\|^2, b_k := E[A_k | \mathcal{F}_k], \omega_k := \frac{1}{2L^2}(1-\delta)(1-3\mu^2)$, 并令 $a_k \equiv 0$, 则显然有 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ 。因此有 $E[\nu_{k+1} | \mathcal{F}_k] \leq (1+a_k)\nu_k - \omega_k + b_k$ 。由 A_k 有:

$$b_k = E[A_k | \mathcal{F}_k] = (1-3\mu^2)\gamma^2 E[\|\epsilon_1^k\|^2 | \mathcal{F}_k] + 3\gamma^2 E[\|\epsilon_2^k\|^2 | \mathcal{F}_k] + 3\gamma^2 E[\|\epsilon_3^k\|^2 | \mathcal{F}_k],$$

故由假设 4 可知 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ 。因此, 由命题 1 知 $\{\|x^k - x^*\|^2\}$ 依概率 1 收敛, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k < \infty$ 成立, 故 $\{x^k\}$ 依概率 1 有界, 即结论 1) 成立;

且 $\omega_k = \frac{1}{2L^2}(1-\delta)(1-3\mu^2)(\min\{\theta\mu, \gamma\})^2 r^2(x^k) \rightarrow 0$ 成立, $\lim_{k \rightarrow \infty} r^2(x^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \Pi_X[x^k - F(x^k)]\|^2 = 0$ 成立, 即结论 2) 成立;

设 \bar{x} 为序列 $\{x^k\}$ 的任一聚点, 则由 F 和 Π 的连续性有 $\bar{x} = \Pi_X[\bar{x} - F(\bar{x})]$, 故由引理 1 知 $\bar{x} \in X^*$, 因此结论 3) 成立;

由于 $\{x^k\}$ 依概率 1 有界, 并且它的任意聚点均依概率 1 为问题(1)的解, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x^k, X^*) = 0$ 依概率 1 成立, 结论 4) 得证。证毕

3 数值试验

该小节选取文献 [10] 中的算例, 对 MESA 算法给出初步的数值试验结果。算法的终止准则为 $\|x^k - \Pi_X[x^k - f(x^k, \xi^k)]\| \leq 10^{-6}$, 各参数的取值分别为: $\theta = 0.5, \gamma = 0.6, \mu = 0.4, \delta = 0.8$ 。测试环境为 Matlab R2016b, 操作系统为 Windows 10, CPU 为 1.8 GHz, 内存为 8.0 GB。定义函数 $f_1(x, \xi), f_2(x, \xi)$ 分别如下:

$$f_1(x, \xi) := \begin{pmatrix} x_1 - \xi x_2 + 3 - 2\xi \\ -\xi x_1 + 2x_2 + \xi x_3 - 2 - \xi \\ \xi x_2 + 3x_3 - 3 - \xi \end{pmatrix}, f_2(x, \xi) := \begin{pmatrix} x_1^2 - \xi x_2 + 3 - 2\xi \\ -\xi x_1 + 2x_2^2 + \xi x_3 - 2 - \xi \\ \xi x_2 + 3x_3^2 - 3 - \xi \end{pmatrix}.$$

算例 1 ξ 是随机变量, $X = R_+^3$, 样本函数取 $f_1(x, \xi)$; 算例 2 ξ 是随机变量, $X = R_+^3$, 样本函数取 $f_2(x, \xi)$; 算例 3 ξ 是随机变量, $X = [0, 4] \times [0, 4] \times [0, 4]$, 样本函数取 $f_1(x, \xi)$; 算例 4 ξ 是随机变量, $X = [0, 4] \times [0, 4] \times [0, 4]$, 样本函数取 $f_2(x, \xi)$ 。

对于上述每个算例,任意给定 $\xi \in [0, 1]$, 它们都有唯一解 $x^* = (0, 1, 1)^T$ 。表 1 给出了 MESA 算法、ESA 算法^[9]和 SAA 算法^[10]对算例 1~4 在随机变量 ξ 服从 $\Omega = [0, 1]$ 上的均匀分布和 ξ 服从 $\Omega = (-\infty, +\infty)$ 上的均值为 1/2、方差为 1/12 的正态分布这两种情形下测试 100 次的平均值的数值试验结果。数值试验中,每次计算均选取初始点 $x^0 = (0, 0, 0)^T$ 。表 1 中的第 1 列至第 4 列分别给出了算例编号、算法名称、所得的近似解 \bar{x} 和计算 (CPU) 时间。

表 1 算例 1~4 的数值试验结果

Tab. 1 Numerical results for example 1~4

算例	算法	随机变量 ξ 服从均匀分布		随机变量 ξ 服从正态分布	
		近似解 \bar{x}	CPU 时间/s	近似解 \bar{x}	CPU 时间/s
1	MESA	(0, 0.999 999, 1.000 002)	0.003 5	(0, 0.999 992, 1.000 004)	0.004 3
	ESA	(0, 0.999 999, 1.000 002)	0.005 5	(0, 0.999 994, 1.000 002)	0.006 5
	SAA	(0.000 061, 0.999 746, 0.999 523)	0.013 23	(0.000 543, 0.994 255, 0.958 932)	0.014 5
2	MESA	(0, 0.999 996, 1.000 005)	0.002 1	(0, 0.999 993, 1.000 004)	0.002 1
	ESA	(0, 0.999 999, 1.000 003)	0.004 3	(0, 0.999 994, 1.000 002)	0.004 3
	SAA	(0.000 002, 1.006 939, 1.009 293)	0.012 6	(0.000 102, 1.000 232, 1.009 234)	0.012 6
3	MESA	(0, 0.999 992, 1.000 003)	0.004 5	(0, 0.999 9994, 1.000 005)	0.004 5
	ESA	(0, 0.999 993, 1.000 002)	0.006 5	(0, 0.999 9993, 1.000 002)	0.006 5
	SAA	(0.006 147, 0.999 463, 0.999 231)	0.013 2	(0.000 034, 0.996 461, 0.999 431)	0.013 2
4	MESA	(0, 0.999 993, 1.000 002)	0.005 5	(0, 0.999 999, 1.000 002)	0.005 5
	ESA	(0, 0.999 997, 1.000 008)	0.007 5	(0, 0.999 999 7, 1.000 008)	0.007 5
	SAA	(0.006 147, 0.946 354, 0.923 166)	0.015 2	(0.000 042, 0.999 143, 0.999 341)	0.015 2

从表 1 可知,本文给出的 MESA 算法和文献[9]中的 ESA,文献[10]中的 SAA 算法对算例 1~4 均能在较短的时间内计算出十分接近问题真解 $x^* = (0, 1, 1)^T$ 的近似解,并且 MESA 算法计算每个算例所花费的时间均少于 ESA 算法,且均明显少于 SAA 算法。因此,本文所提的 MESA 算法比 ESA 算法和 SAA 算法更为有效。

4 小结

本文给出了求解随机变分不等式问题的 MESA 算法。在较弱的假设下,证明了 MESA 算法产生的序列 $\{x^k\}$ 的每一个聚点都是问题(1)的解依概率 1 成立。并且 $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x^k, X^*) = 0$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} r^2(x^k) = 0$ 都是依概率 1 成立。初步的数值试验结果表明 MESA 算法优于 ESA 算法和 SAA 算法。鉴于随机算法需要多次取样,接下来考虑修正算法框架,设计更为合适的终止准则,让算法自行多次取样,并给出相应的收敛性结果。

参考文献:

- [1] FACCHINEI F, PANG J S. Finite dimensional variational inequalities and complementarity problems[M]. New York: Springer, 2003.
- [2] FERRIS M C, PANG J S. Engineering and economic applications of complementarity problems[J]. SIAM Review, 1997, 39(4): 669-713.
- [3] XU H F. Sample average approximation methods for a class of stochastic variational inequality problems[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2010, 27(01): 103-119.
- [4] JIANG J H, XU H F. Stochastic approximation approaches to the stochastic variational inequality problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(6): 1462-1475.
- [5] KOSHAL J, NEDIC A, SHANBHAG U V. Regularized iterative stochastic approximation methods for stochastic variational inequality problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(3): 594-609.
- [6] YOUSEFIAN F, NEDIC A, SHANBHAG U V. On smoothing, regularization, and averaging in stochastic approximation methods for stochastic variational inequality problems[J]. Mathematical Programming, 2017, 165(1): 391-431.
- [7] KANNAN A, SHANBHAG U V. The pseudomonotone stochastic variational inequality problem; analytical state-

- ments and stochastic extragradient schemes[C]//American Control Conference (ACC), Portland, US, IEEE, 2014: 2930-2935.
- [8] IUSEM A N, JOFRE A, OLIVEIRAI R I, et al. Extragradient method with variance reduction for stochastic variational inequalities [J]. SIAM Journal on Optimization, 2017, 27(2): 686-724.
- [9] IUSEM A N, JOFRE A, OLIVEIRAI R I, et al. Variance-based extragradient methods with line search for stochastic variational inequalities[J]. SIAM Journal on Optimization, 2019, 29(1): 175-206.
- [10] WANG M Z, LIN G H, GAO Y L, ALL M M. Sample average approximation method for a class of stochastic variational inequality problems [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2011, 24(6): 1143-1153.
- [11] LOPEZ G, MARTIN V, XU H K. Perturbation techniques for nonexpansive mappings with applications [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2009, 10(4): 2369-2383.
- [12] ROBBINS H, SIEGMUND D. A convergence theorem for nonnegative almost supermartingales and some applications [J]. Optimizing Methods in Statistics, 1971: 233-257.
- [13] CENSOR Y, GIBALI A, REICH S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 148(2): 318-335.

Operations Research and Cybernetics

Modified Extragradient Stochastic Approximation Algorithms for Solving Stochastic Variational Inequality Problems

ZHANG Xiaojuan, DU Xuewu

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The stochastic approximation algorithms based on extragradient for solving stochastic variational inequality (SVI) problems are studied. [Methods] A class of modified extragradient stochastic approximation (MESA) algorithms for solving SVI problems is presented in the light of the extragradient algorithm for solving the classical variational inequality problems. [Findings] Under appropriate assumptions, the global convergence of MESA algorithms are proved. The preliminary numerical results show that MESA algorithms are effective. [Conclusions] MESA algorithms are the generalizations for some existing extragradient stochastic approximation algorithms, and the proof of global convergence of MESA algorithms needs weaker assumptions.

Keywords: stochastic variational inequality; stochastic approximation; extragradient algorithm; global convergence

(责任编辑 陈 乔)

物流网络下的多产品多阶段随机库存问题*

刘丰年¹, 付永彬¹, 孙海琳²

(1. 南京理工大学 经济管理学院, 南京 210094; 2. 南京师范大学 数学科学学院, 南京 210097)

摘要:【目的】讨论集生产、运输和批发为一体的垄断制造商在不确定的环境下对多种产品做出合理的生产、销售、库存和运输决策。【方法】在一个复杂的物流网络中产品的价格和运输都不确定的大背景下,提出一个物流网络下的多产品多阶段随机库存模型,并运用随机对偶动态规划(Stochastic dual dynamic programming, SDDP)算法对模型进行求解。【结果】1) 理论分析证明了在一定条件下多阶段随机库存模型的阶段数越多,收益也会越高。2) 数值实验结果表明在一定条件下多阶段随机库存模型的最终收益会随着阶段数的增加而逐步提高。但在给定条件不满足的情况下,多阶段随机库存模型未必会具有优势。【结论】物流网络下的多产品多阶段随机库存模型可以在不确定的环境下,更好的对抗未来的风险,具有重要的现实意义。

关键词:多阶段库存问题;物流网络;SDDP;产品定价

中图分类号:O221

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)05-0022-13

当人们的需求朝着多样化、个性化的方向发展时,企业想要精准预测某一行业市场需求的变化几乎是不可行的。正因为如此,企业在制定生产决策时,不仅要考虑到产品是否能够满足顾客的需求,还要避免库存的大量积压。此时,对于库存问题的研究就变得尤为重要。国内外学者对于具有随机需求的库存问题有过不少研究。Dvoretzky 等人^[1]假定多产品的需求向量为随机的情况下研究了多产品库存问题;Abbou 等人^[2]在考虑需求不确定性的情况下,还把生产延迟引入到库存调节的问题中;高婷等人^[3]针对需求依赖于库存水平的风险规避型零售商,提出了基于条件风险价值(Conditional value-at-risk, CVaR)准则的报童模型;Kitaeva 等人^[4]则主要研究了当需求具有价格依赖性的多产品报童问题。考虑到制造商的生产与销售行为开始朝着多品种、小批量的方向演进,为了进一步避免损失,还需要对多阶段随机库存问题进行深入研究。Torkaman 等人^[5]研究了闭环供应链中具有生产序列设置的多产品多阶段生产、库存问题;陈杰等人^[6]对具有多元马氏需求特征的多产品多阶段库存优化模型进行了研究;Pooya 等人^[7]分析了具有生产周期的多阶段生产—库存系统的二次最优控制模型;Hu 等人^[8]考虑了需求不确定的随机批量大小和调度问题,并开发了多阶段随机规划模型以最小化整个系统成本;Chang 等人^[9]开发出一种新颖的多阶段库存模型,允许为选定的供应商分配不同的订单数量。

随着近些年经济全球化和全球电子营销的扩展,高效合理的物流系统成为企业成功的关键因素。Keizer 等人^[10]考虑了具有异质性衰减的易腐蚀品的物流网络设计问题;Cheong 等人^[11]研究多个供应商运输原材料到多个制造工厂的物流网络设计问题;Fattahi 等人^[12]讨论了在多个战术周期的规划范围内集成的前向/后向物流网络问题,并提出了一种混合整数线性规划模型;Bozorgirad 等人^[13]针对多源物流网络问题,建立多源多产品多级物流网络模型,并用遗传算法进行求解。但是在众多研究中鲜有学者将物流网络与多阶段随机库存问题联系在一起。

SDDP 算法是近些年来许多学者研究时用于解决多阶段随机规划问题^[14]的有效算法,该算法由 Pereira 和 Pinto^[15]引入。Shapiro 等人^[16]讨论了基于 SDDP 方法的多阶段(线性)随机规划问题的风险中性和风险规避方法。Rebennack^[17]将 SDDP 算法与 Benders 分解技术相结合,用于求解多阶段随机优化模型。在运用 SDDP 算法解决多阶段随机规划问题时,通常需要巨大的计算量,这会减慢高维问题的收敛速率,Dupačová 等人^[18]通过

* 收稿日期:2018-12-25 修回日期:2019-04-11 网络出版时间:2019-09-26 11:24

资助项目:国家自然科学基金(No. 11871276;No. 11571056)

第一作者简介:刘丰年,男,研究方向为多阶段随机规划,E-mail: lfnysy@163.com;通信作者:孙海琳,男,教授,博士,E-mail: hlsun@njnu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1123.008.html>

情景减少的预处理方式,有效地减少了总体的计算时间。Brandi 等人^[19]提出一个新的收敛准则,保证在不增加计算负担情况下,运用条件风险价值(CVaR)使得 SDDP 算法的有效性得到提高。Philpott 等人^[20]研究了一类具有分布鲁棒目标的 SDDP 算法,并在标准假设下证明了其几乎可靠的收敛性。

综上所述,本文首次将多产品多阶段随机库存问题与物流网络相结合,建立了物流网络下的多产品多阶段随机库存模型,并证明了在一定条件下,多阶段随机库存模型的阶段数越多,最终收益也会越高。随后运用 SDP 算法对模型进行求解。在数值实验部分,结果表明模型在一定条件下的最终收益会随着阶段数的增加而提高,但在给定条件不满足的情况下,多阶段模型不一定具有优势。

1 模型构建

1.1 模型描述及参数设定

在经济全球化和市场经济快速发展的大背景下,集生产、运输和批发为一体的垄断制造商为了满足顾客的需求,生产多种产品运送到批发点进行销售。在这个过程中,制造商为了保证整体运输系统的运输效率,往往不会直接将产品运输到相应的批发点,而是通过转运节点向批发点进行产品的配送。本文考虑制造商在多阶段内对多产品的生产及运输问题并进行建模。这里用随机变量来描述每一阶段未来不确定的市场情景,即市场中未来情景的实现情况无法事先预测,例如产品的供大于求或者供小于求等情况。进一步假设每一阶段未来不确定的市场情景是相互独立的,产品的销售价格与该随机变量相关。产品的制造成本为已知量。由于生产线上设备生产容量的限制,这里设置一个产品的订购约束。所谓订购约束是指考虑到单工厂生产能力有限,以及对市场需求的预测有一个上限,所以针对每个批发节点对于不同的产品在每一期设置一个最大订购量。本文假设每个批发点对各种产品均有销售,且制造中心与每个批发点之间存在一个物流网络。假设每一阶段物流网络中路况为随机变量,并且在每一阶段都是相互独立的,产品的运输成本与该随机变量相关。下面通过表 1 对模型参数的设定做一个详细介绍。

下面图 1 是表示多级物流网络的构造。图 2 是在随机变量服从离散分布,并且具有阶段独立性的情况下,假设每阶段有两种情景的情景树。

1.2 物流网络下的多产品多阶段随机库存模型

为了方便对模型的理解,下面将目标函数定义为如下形式:

$$J_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T) = -Y_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T) + H_T(z_{nmT}(\zeta_{[T]})) + N_T(W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T), \quad (1)$$

$$J_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = -Y_t(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) + H_t(z_{nmt}(\zeta_{[t]})) + N_t(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) + C_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]})), \quad (2)$$

$$J_1(x_{nm1}) = C_1(x_{nm1}). \quad (3)$$

其中 J_t 是第 t 阶段制造商的总损失, $t = 1, \dots, T$ 。 $Y_t(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$, $H_t(z_{nmt}(\zeta_{[t]}))$, $N_t(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$, $C_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]}))$ 分别表示销售收入、库存成本、运输成本和订购成本。具体的函数形式为:

$$Y_t(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M y_{nmt}(\zeta_{[t]}) p_{nmt}(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t), \forall n, m, t = 2, \dots, T, \quad (4)$$

$$H_t(z_{nmt}(\zeta_{[t]})) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h_{nmt} z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \forall n, m, t = 2, \dots, T, \quad (5)$$

$$N_t(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = \sum_{m=1}^M \sum_{a \in \mathcal{A}} f_{mat}(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t), \forall n, m, t = 2, \dots, T, a \in \mathcal{A}, \quad (6)$$

$$C_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]})) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_m x_{nmt}(\zeta_{[t]}), \forall n, m, t = 1, \dots, T-1. \quad (7)$$

下面从第 T 阶段开始介绍模型。

第 T 阶段:

$$\min_{y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]})} J_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T), \quad (8)$$

$$\text{s. t. } z_{nmT}(\zeta_{[T]}) = z_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) + x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) - y_{nmT}(\zeta_{[T]}), \forall n, m, \quad (9)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{n=1}^N x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, \quad (10)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, k = L + 1, \dots, L + N, n = k - L, \quad (11)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mbT}(\zeta_{[T]}), \forall m, k = 1, \dots, L, \quad (12)$$

$$y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}) \geq 0, \forall n, m \quad (13)$$

表 1 参数及变量

Tab.1 Parameters and variables

项目	符号	含义
参数	T	销售阶段数, $t = 1, \dots, T$
	M	产品种类数, $m = 1, \dots, M$
	L	转运节点数目
	N	批发点数目, $n = 1, \dots, N$
	k	$k = 0$ 表示制造节点, $k = 1, \dots, L$ 表示转运节点, $k = L + 1, \dots, L + N$ 表示批发节点, 当 k 表示批发节点时, $k - L = n, k = L + 1, \dots, L + N$
	\mathcal{A}	物流网络中所有边的集合, $a \in \mathcal{A}, \mathcal{A}_k^+$ 表示以节点 k 为起点边的集合, \mathcal{A}_k^- 表示以 k 为终点边的集合
	c_m	第 m 种产品的生产成本
	v_{nmt}	第 n 个批发点对第 m 种产品在第 t 阶段的订购约束
	h_{nmt}	第 n 个批发点对第 m 种产品在第 t 阶段的库存成本
	随机变量	ξ_{nmt}
CON_{at}		表示边 a 在第 t 阶段的路况, $a = 1, \dots, A, A$ 表示网络中边的总数, $CON_{at} : \Omega \rightarrow \Xi_{at}$ 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, $CON_{a1} = 0$
ζ_t		$\zeta_t = (\xi_{11t}, \dots, \xi_{NMt}, CON_{1t}, \dots, CON_{At})$, 且 $\zeta_1 = (0, \dots, 0)$ 是确定的, $\zeta_t : \Omega \rightarrow \Xi_{at}$ 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, $\Xi_t = \Xi_{11t} \times \dots \times \Xi_{NMt} \times \dots \times \Xi_{1t} \times \dots \times \Xi_{At}$
$\zeta_{[t]}$		直到 t 阶段的随机过程, $\zeta_{[t]} = (\zeta_1, \dots, \zeta_t)$
$f_{mat}(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$		产品 m 在边 a 上第 t 阶段的运输成本 $f_{mat}(W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = W_{mat}(\zeta_{[t]}) CON_{at} \beta, \beta > 0$
决策变量	$p_{nmt}(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t)$	第 n 个批发点对于第 m 种产品在第 t 阶段的售价 $p_{nmt}(y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) = \alpha(\xi_{nmt} - y_{nmt}(\zeta_{[t]})), \alpha > 0$
	$x_{nmt}(\zeta_{[t]})$	第 n 个批发点对第 m 种产品在第 t 阶段的订购量, 订购决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $x_{nm1}(\zeta_{[1]}) = 0$
	$y_{nmt}(\zeta_{[t]})$	第 n 个批发点对第 m 种产品在第 t 阶段的销售量, 销售决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $y_{nm1} = 0$
	$z_{nmt}(\zeta_{[t]})$	第 n 个批发点对第 m 种产品在第 t 阶段的库存量, 库存决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $z_{nm1} = 0$
	$W_{mat}(\zeta_{[t]})$	产品 m 在边 a 上第 t 阶段的运输量, 运输决策是随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数, 其中 $W_{m1} = 0$

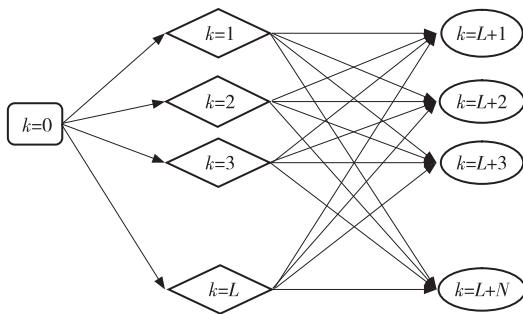


图 1 多级物流网络结构

Fig.1 Multi-level logistics network structure

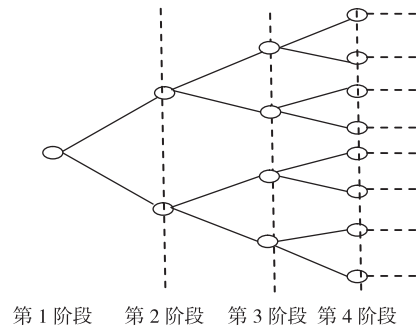


图 2 情景树

Fig.2 Scenarios tree

.....

第 t 阶段:

$$\min_{x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]})} J_t(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]}), \zeta_t) + E[Q_{t+1}(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_{t+1})], \quad (14)$$

$$\text{s. t. } z_{nmt}(\zeta_{[t]}) = z_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}) + x_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}) - y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \forall n, m, t=2, \dots, T-1, \quad (15)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{mat}(\zeta_{[t]}) = \sum_{n=1}^N x_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}), \forall m, t=2, \dots, T-1, \quad (16)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{mat}(\zeta_{[t]}) = x_{nmt-1}(\zeta_{[t-1]}), \forall m, k=L+1, \dots, L+N, t=2, \dots, T-1, n=k-L, \quad (17)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{mat}(\zeta_{[t]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mbt}(\zeta_{[t]}), \forall m, k=1, \dots, L, t=2, \dots, T-1, \quad (18)$$

$$x_{nmt}(\zeta_{[t]}) \leq v_{nmt}, \forall n, m, t=2, \dots, T-1, \quad (19)$$

$$x_{nmt}(\zeta_{[t]}), y_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), W_{mat}(\zeta_{[t]}) \geq 0, \forall n, m, t=2, \dots, T-1. \quad (20)$$

在目标函数(14)中 $Q_{t+1}(x_{nmt}(\zeta_{[t]}), z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \zeta_{t+1})$ 表示的是该模型在第 $t+1$ 阶段的最优值函数。约束(15)表示在批发点 n 处, m 种产品的库存平衡关系。约束(16)确保了产品 m 从制造中心运送到转运节点的运输量之和等于批发点对产品 m 的订购量之和。约束(17)是指在每个批发节点上每种产品的接收量等于订购量。约束(18)则是保证了在转运节点($k=1, \dots, L$)处, 产品的进出量相同。约束(19)表示的是第 t 期产品的订购约束。约束(20)表示变量的符号约束。而在 T 阶段, 由于不再订购产品, 所以目标函数中没有产品的订购成本。

第 1 阶段:

$$\min_{x_{nm1}} J_1(x_{nm1}) + E[Q_2(x_{nm1}, \zeta_2)] \quad (21)$$

$$\text{s. t. } x_{nm1} \leq v_{nm1}, \forall m, n, \quad (22)$$

$$x_{nm1} \geq 0, \forall n, m. \quad (23)$$

而在第 1 阶段, 制造商只考虑产品在批发点的订购情况, 并且产品是在第 2 阶段开始时运输到各个批发点, 所以目标函数中只包含产品的订购成本。

为了简化符号, 令 $s_2(\zeta_{[2]}), s_T(\zeta_{[T]})$ 为:

$$s_2(\zeta_{[2]}) = (x_{nm2}(\zeta_{[2]}), y_{nm2}(\zeta_{[2]}), z_{nm2}(\zeta_{[2]}), W_{ma2}(\zeta_{[2]}), n=1, \dots, N, m=1, \dots, M, a \in \mathcal{A}),$$

$$s_T(\zeta_{[T]}) = (y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), n=1, \dots, N, m=1, \dots, M, a \in \mathcal{A}).$$

综上可得到下列多阶段优化模型:

$$\min_{\substack{x_{nm1} \geq 0 \\ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M x_{nm1} \leq v_1}} J_1 + E \left[\min_{s_2(\zeta_{[2]})} J_2 + E \left[\dots + E \left[\min_{s_T(\zeta_{[T]})} J_T + E \left[\text{s. t. } s_T(\zeta_{[T]}) \in \theta_T \right] \right] \right] \right] \right]. \quad (24)$$

其中:

$$\theta_2 = \left\{ s_2(\zeta_{[2]}) \left| \begin{array}{l} J_1 = J_1(x_{nm1}), J_2 = J_2(x_{nm2}(\zeta_{[2]}), y_{nm2}(\zeta_{[2]}), z_{nm2}(\zeta_{[2]}), W_{ma2}(\zeta_{[2]}), \zeta_2), \\ J_T = J_T(y_{nmT}(\zeta_{[T]}), z_{nmT}(\zeta_{[T]}), W_{maT}(\zeta_{[T]}), \zeta_T), \\ z_{nm2}(\zeta_{[2]}) = z_{nm1}(\zeta_{[1]}) + x_{nm1}(\zeta_{[1]}) - y_{nm2}(\zeta_{[2]}), \forall n, m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{ma2}(\zeta_{[2]}) = \sum_{n=1}^N x_{nm1}(\zeta_{[1]}), \forall m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{ma2}(\zeta_{[2]}) = x_{nm1}(\zeta_{[1]}), \forall m, k=L+1, \dots, L+N, n=k-L, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{ma2}(\zeta_{[2]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mb2}(\zeta_{[2]}), \forall m, k=1, \dots, L, \\ x_{nm2}(\zeta_{[2]}) \leq v_{nm2}, \forall m, n, \\ s_2(\zeta_{[2]}) \geq 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$\theta_T = \left\{ \begin{array}{l} s_T(\zeta_{[T]}) \left\{ \begin{array}{l} z_{nmT}(\zeta_{[T]}) = z_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) + x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) - y_{nmT}(\zeta_{[T]}), \forall n, m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_0^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{n=1}^N x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^-} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall m, k = L + 1, \dots, L + N, n = k - L, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_k^+} W_{maT}(\zeta_{[T]}) = \sum_{b \in \mathcal{A}_k^-} W_{mbT}(\zeta_{[T]}), \forall m, k = 1, \dots, L, \\ s_T(\zeta_{[T]}) \geq 0, x_{nmT}(\zeta_{[T]}) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

本文中订购决策(产品的订购数量)是在每一期随机变量实现之前确定的,而追索决策(Recourse decision)是受到先前的订购决策和本期随机变量实现情况的影响,所以订购决策是划分模型阶段数的关键决策。所谓追索决策指的是不确定情景实现后的补救或更新措施,在本文中是指确定订购决策以及不确定情景实现后对产品的运输决策、库存决策和销售决策。上述模型(24)式是考虑 T 个销售时期的 T 阶段模型,其中阶段数和时期数相等。本文为体现多阶段模型的优势,在多时期模型中,对较多阶段模型与较少阶段模型进行比较分析。下面就以两阶段模型、三阶段模型和四阶段模型为例进行说明。

这里将整个销售期分为 4 个时期,每一期有两种随机情景。情景树如图 3~图 5 所示,图中黑色正方形表示订购决策,黑色菱形表示追索决策。在图 3 中,两阶段模型所有的订购决策在第 1 期开始时就已经全部确定了,后续 3 个时期不再订货。这里需要注意的是产品在第 2 期已经运输到各个批发点了,所以两阶段模型在第 3 期和第 4 期只需要考虑销售和库存决策。在图 4 中,三阶段模型在第 2 期可以基于第 1 期的决策信息和第 2 期的不确定性来确定这一期的订购决策,并且第 2 期的订购可用于第 3 期和第 4 期的销售,第 3 期末销售完的部分直接作为库存用于第 4 期的销售。而四阶段模型则可以在第 1~3 期开始时就根据先前的信息和当期的不确定性来确定订购决策。显然,随着阶段数的增加模型将会具有更大的决策空间。

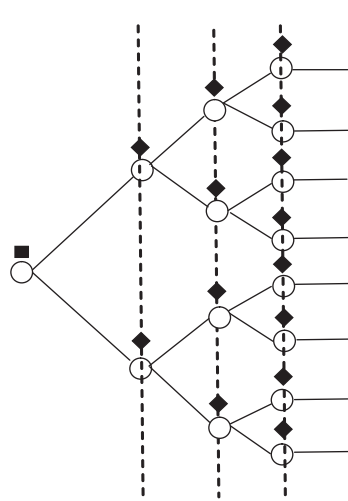


图 3 两阶段模型

Fig. 3 Two-stage model

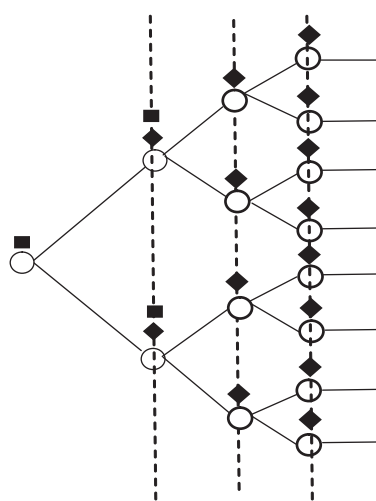


图 4 三阶段模型

Fig. 4 Three-stage model

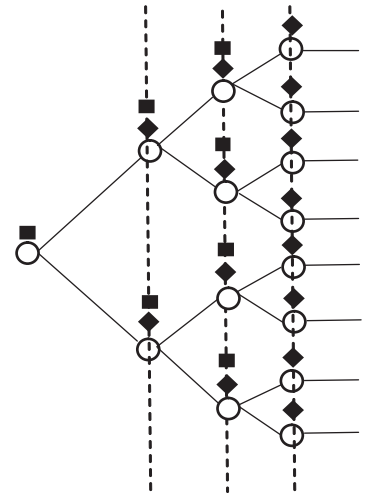


图 5 四阶段模型

Fig. 5 Four-stage model

接下来考虑一般情况,为了方便理解,这里假定 $t_1 (t_1 = 2, \dots, T)$ 阶段模型和 $t_1 - 1$ 阶段模型都为物流网络下的多产品多阶段随机库存模型,共有 T 个销售时期。两类模型在销售期内的订购时间如下:

$L_{t_1} = (1, 2, 3, 4, \dots, t_1 - 1)$, 表示 t_1 阶段模型从第 1 期开始订购,直到 $t_1 - 1$ 期结束。

$L_{t_1 - 1} = (1, 2, 3, 4, \dots, t_1 - 2)$, 表示 $t_1 - 1$ 阶段模型从第 1 期开始订购,直到 $t_1 - 2$ 期结束。

t_1 阶段模型的订购决策为 $x_t(\zeta_{[t]})$, $t = 1, \dots, t_1 - 1$, 这里将订购决策作为随机变量 $\zeta_{[t]}$ 的函数。 t_1 阶段模型的销售决策,库存决策分别用 $y_t(\zeta_{[t]})$, $z_t(\zeta_{[t]})$ 表示,且 $t = 2, \dots, T$ 。运输决策为 $w_t(\zeta_{[t]})$, $t = 2, \dots, t_1$ 。 $t_1 - 1$ 阶段模型订购决策为 $x'_t(\zeta_{[t]})$, $t = 1, \dots, t_1 - 2$ 。销售决策、库存决策分别 $y'_t(\zeta_{[t]})$, $z'_t(\zeta_{[t]})$, $t = 2, \dots, T$ 。运输决策为 $w'_t(\zeta_{[t]})$, $t = 2, \dots, t_1 - 1$ 。 t_1 阶段模型订购约束为 $v_t = (v_{1t}, \dots, v_{nt}, \dots, v_{Nt})$, $t = 1, \dots, t_1 - 1$ 。 $t_1 - 1$ 阶段模

型订购约束为 $v'_t = (v'_{1t}, \dots, v'_{nmt}, \dots, v'_{Nt})$, $t=1, \dots, t_1-2$ 。而两类模型的总损失分别用 R_{t_1} 和 R_{t_1-1} 表示。下面给出一条定理。

定理 1 在 T 个销售时期内, 当 $t_1 \leq T$ 时 t_1 阶段模型和 t_1-1 阶段模型如果满足下列条件: 1) $v_{nmt_1-2} \geq ri_{nmt_1-1}$, 其中 $ri_{nmt_1-1} = \max_{\xi_{nmt_1-1} \in \Xi_{nmt_1-1}} \xi_{nmt_1-1}$; 2) $\text{CON}_{a_1}(\omega) \leq \text{CON}_{a_1-1}(\omega)$, $\omega \in \Omega$; 3) $v'_{t_1-2} \leq v_{t_1-2} + v_{t_1-1}$ 。那么必有 $R_{t_1-1} \geq R_{t_1}$ 。

证明 本文证明部分是为了验证在一定条件下多阶段模型的最终收益会随着阶段数的增加而增加, 所以将 t_1 阶段模型与 t_1-1 阶段模型进行比较。为方便比较两类模型的最优决策, 在证明中将 t_1-1 阶段模型在 t_1-2 期的订购决策分解成为 t_1-2 期和 t_1-1 期的订购决策(使 t_1-1 阶段模型在 t_1-1 期也具有订购决策), 而销售决策、库存决策和运输决策也会相应地做出改变。为了方便理解, 下面给出定理中条件部分的简单解释。

1) $v_{nmt_1-2} \geq ri_{nmt_1-1}$, 其中 $ri_{nmt_1-1} = \max_{\xi_{nmt_1-1} \in \Xi_{nmt_1-1}} \xi_{nmt_1-1}$, 保证了在 t_1-2 期, t_1 阶段模型的最大订购量一定满足 t_1-1 期的市场需求, 即 $v_{t_1-2} - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$ 必然大于等于 0。

2) $\text{CON}_{a_1}(\omega) \leq \text{CON}_{a_1-1}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, 表示 t_1 期道路运输情况一定不会比 t_1-1 期差, 即保证 t_1 期的单位运输成本要比 t_1-1 低。

3) $v'_{t_1-2} \leq v_{t_1-2} + v_{t_1-1}$, 保证 t_1-1 阶段模型在 t_1-2 期的订购约束一定小于等于 t_1 阶段模型在 t_1-2 期和 t_1-1 期订购约束的总和。

考虑 t_1, t_1-1 阶段模型的最优决策如上所示, 现在分解 t_1-1 阶段模型的最优决策, 使它可以为 t_1 阶段模型的可行决策, 现在将 t_1-1 阶段模型在 t_1-2 期的订购决策分为下面两部分:

$$x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) + x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}).$$

将 $x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$ 作为 t_1-2 期的订购决策, $x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$ 作为 t_1-1 期的订购决策。这里分两种情形进行讨论。

第 1 种情形是 t_1-1 阶段模型在 t_1-2 期的订购决策大于等于 t_1 阶段模型在 t_1-2 期的订购约束, 即 $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) \geq v_{t_1-2}$ 。此时, 令 $x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = v_{t_1-2}$, $x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$, 由条件 3) 可知 $v'_{t_1-2} - v_{t_1-2} \leq v_{t_1-1}$, 且 $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) \leq v'_{t_1-2}$, 所以 $x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) \leq v_{t_1-1}$ 。

第 2 种情形为 t_1-1 阶段模型在 t_1-2 期的订购决策小于 t_1 阶段模型在 t_1-2 期的订购约束, 即 $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) < v_{t_1-2}$ 。此时, 令 $x''_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$, $x''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = 0$ 。

再将 t_1-1 阶段模型在 t_1-1 期的运输决策分为两部分: $w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$ 。将 $w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$ 作为 t_1-1 期的运输决策, $w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$ 作为 t_1 期的运输决策。但是 t_1-1 期的运输决策是由 t_1-2 期的订购决策决定的。故两种情形下的运输决策分别为: 第 1 种情形中, $w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2}$, $w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$; 第 2 种情形中, $w''_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$, $w''_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = 0$ 。

故在两种情形下 t_1-1 阶段模型在 t_1-1 期的库存决策为: 第 1 种情形中, $v_{t_1-2} - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$; 第 2 种情形中, $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$ 。

在第 2 种情形中, 由库存平衡关系可知库存决策没有发生变化。而在第 1 种情形中, 根据条件 1) 可知 t_1 阶段模型在 t_1-2 期的订购约束是要大于 t_1-1 期产品的市场不确定性, 从而 t_1-2 期的订购量一定可以满足 t_1-1 期市场的需求, 即 $v_{t_1-2} - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$ 必然大于等于 0, 修改后的库存决策一定大于等于 0。

现在把 t_1-1 阶段模型的最优决策转换为 $\bar{x}_t(\zeta_{[t]}), \bar{y}_t(\zeta_{[t]}), \bar{z}_t(\zeta_{[t]}), \bar{w}_t(\zeta_{[t]})$ 。

订购决策: 第 1 种情形中, $\bar{x}_t(\zeta_{[t]}) = x'_t(\zeta_{[t]})$, $t=1, \dots, t_1-3$, $\bar{x}_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = v_{t_1-2}$, $\bar{x}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2} \leq v_{t_1-1}$ 。第 2 种情形中, $\bar{x}_t(\zeta_{[t]}) = x'_t(\zeta_{[t]})$, $t=1, \dots, t_1-3$, $\bar{x}_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$, $\bar{x}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = 0$ 。

销售决策: $\bar{y}_t(\zeta_{[t]}) = y'_t(\zeta_{[t]})$, $t=2, \dots, T$ (两种情形的销售决策相同)。

库存决策: 第 1 种情形中, $\bar{z}_t(\zeta_{[t]}) = z'_t(\zeta_{[t]})$, $t=2, \dots, T$, 其中 $\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2} + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) \geq 0$; 第 2 种情形中, $\bar{z}_t(\zeta_{[t]}) = z'_t(\zeta_{[t]})$, $t=2, \dots, T$ 。

运输决策: 第 1 种情形中: $\bar{w}_t(\zeta_{[t]}) = w'_t(\zeta_{[t]})$, $t=2, \dots, t_1-2$, $\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2}$, $\bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$; 第 2 种情形中: $\bar{w}_t(\zeta_{[t]}) = w'_t(\zeta_{[t]})$, $t=2, \dots, t_1-2$, $\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]})$, $\bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = 0$ 。

通过上述分析可知, t_1-1 阶段模型转换后的最优决策必定是 t_1 阶段模型的一组可行解。用 \bar{R}_{t_1} 表示转换后

的总损失。因为 $t_1 - 1$ 阶段模型转换后的最优决策不一定是 t_1 阶段模型的最优决策,所以必有 $\bar{R}_{t_1} \geq R_{t_1}$ 。

此外,由于每一期产品的单位订购成本和销售决策不变,所以订购成本和销售收入不变。但库存决策和运输决策的改变会导致总损失的变化。下面讨论 $t_1 - 1$ 阶段模型转换后总损失的变化,即:

$$R_{t_1-1} - \bar{R}_{t_1} = H_{t_1-1}(z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) - H_{t_1-1}(\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) + N_{t_1-1}(w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}), \zeta_{t_1})。$$

接下来分两种情形讨论。

情形 1:
$$z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}),$$

$$\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2} + z'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - y'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}),$$

其中 $x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) \geq v_{t_1-2}$, 所以 $z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) \geq \bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$, 从而 $H_{t_1-1}(z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) - H_{t_1-1}(\bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})) \geq 0$ 。

由条件 2) 可知, t_1 期的路况比 $t_1 - 1$ 期的路况要好, 且转换后 $\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$ 的运输量之和等于 $w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]})$, 即 $w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = \bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) + \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]})$, 其中 $\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = v_{t_1-2}, \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = x'_{t_1-2}(\zeta_{[t_1-2]}) - v_{t_1-2}$ 。所以 $N_{t_1-1}(w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \zeta_{t_1-1}) - N_{t_1-1}(\bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}), \zeta_{t_1}) \geq 0$ 。

情形 2: $z'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = \bar{z}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), w'_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}) = \bar{w}_{t_1-1}(\zeta_{[t_1-1]}), \bar{w}_{t_1}(\zeta_{[t_1]}) = 0$, 故 $R_{t_1-1} = \bar{R}_{t_1}$ 。

综上所述 $R_{t_1-1} - \bar{R}_{t_1} \geq 0$, 由此可推出 $R_{t_1-1} \geq R_{t_1}$ 。

证毕

从以上分析可知, 在一定条件下物流网络下的多阶段库存模型的最优决策是随着阶段数的增加而越来越好。

2 运用 SDDP 算法求解模型(24)

SDDP 算法是一个用于求解多阶段随机规划问题的经典算法。本文将算法用于求解物流网络下的多产品多阶段随机库存模型, 这里先给出算法的基本描述, 然后再给出算法的逻辑流程图。

2.1 SDDP 算法的后向步骤

SDDP 算法的后向步骤是由后往前推进的一个过程, 详细步骤可参考文献[16], 这里定义决策变量 $X_t = (x_t, y_t, z_t, W_t)^T, x_t = (x_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, x_{nmt}(\zeta_{[t]}), \dots, x_{NMt}(\zeta_{[t]}))$, 指每个批发点对每种产品在第 t 阶段的订购量, $y_t = (y_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, y_{nmt}(\zeta_{[t]}), \dots, y_{NMt}(\zeta_{[t]}))$ 和 $z_t = (z_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, z_{nmt}(\zeta_{[t]}), \dots, z_{NMt}(\zeta_{[t]}))$ 分别表示每个批发点的每种产品在第阶段的销售量和库存量。 $W_t = (W_{11t}(\zeta_{[t]}), \dots, W_{mat}(\zeta_{[t]}), \dots, W_{Mat}(\zeta_{[t]}))$ 是每种产品在每条边上第 t 阶段的运输量, A 表示的是边的总数。 $\bar{X}_t (t=1, \dots, T-1)$ 为迭代点(算法刚开始的时候可以将它们全设为 0, 后续可通过 SDDP 算法的前向步骤求得新的迭代点)。这里每阶段考虑 S_t 种确定的情景, $\zeta_s, s=1, \dots, S_t$ 。 $Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)$ 是模型(8)~(13)在第 T 期的最优值函数, 而 $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$ 则是其期望值。现在令 $\mathcal{Q}_T(X_{T-1})$ 是 $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$ 的近似值, $\mathcal{Q}_T(X_{T-1})$ 是由切平面集合的最大值构造而成, 表达式为:

$$\mathcal{Q}_T(X_{T-1}) = \max_{u \in \mathcal{S}} \{\alpha_{Tu} + \beta_{Tu}^T X_{T-1}\}。 \tag{25}$$

其中: β_{Tu}^T 表示每一步迭代中求得的切线的梯度值, α_{Tu} 表示每一步迭代中求得的切线中的常数项, \mathcal{S} 表示 β_{Tu}^T 和 α_{Tu} 的指标集合。接下来从算法的第 c 步进行解释。

第 T 阶段:

$$\min_{X_T} J_T(X_T, \zeta_T), \tag{26}$$

$$\text{s. t. } A_1 X_T = B_1 \bar{X}_{T-1}^{-1}, \tag{27}$$

$$A_2 X_T = B_2 \bar{X}_{T-1}^{-1}, \tag{28}$$

$$A_3 X_T = B_3 \bar{X}_{T-1}^{-1}, \tag{29}$$

$$A_4 X_T = A_5 X_T, \tag{30}$$

$$X_T \geq 0. \tag{31}$$

此处的模型(26)~(31)与模型(8)~(13)是相互对应的, 只是模型(8)~(13)中将决策变量统一为向量的形式。下面以约束(27)为例进行说明, 在约束(27)中 A_1 和 B_1 都为 0, 1 矩阵。矩阵 A_1 中为 1 的元素分别对应决策变量中的销售量和库存量, 而矩阵 B_1 中为 1 的元素则对应决策变量中的订购量和库存量, 将矩阵 A_1 和 B_1 分别与 T 阶段的决策变量和 $T-1$ 阶段的迭代点相乘得到如下形式:

$$z_{nmT}(\zeta_{[T]}) + y_{nmT}(\zeta_{[T]}) = z_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}) + x_{nmT-1}(\zeta_{[T-1]}), \forall n, m.$$

上式就等同于约束(9),其余部分的转化方式与上式类似,这里就不再说明。

根据上述模型,写出它的拉格朗日函数如下:

$$J_T(X_T, \zeta_T) + \lambda_{1T}(H_1 X_T - H_2 \bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}) + \lambda_{2T}(A_4 X_T - A_5 X_T). \quad (32)$$

$$\text{其中 } H_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}.$$

在 T 阶段随机变量 ζ_T 的支持集为含有 S_T 种已知情景的集合,且 $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$ 为迭代点,所以可将模型(26)~(31)在 T 阶段的最优值和拉格朗日乘子分别表示为 $Q_{T_s}(\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}, \zeta_T^s)$, $\lambda_{1T_s}, \lambda_{2T_s}, s=1, \dots, S_T$, 其中 λ_{1T_s} 是与上一阶段决策相关的对偶解。并且从(32)式可知目标函数在第 T 阶段对偶问题的最优值是随着 $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$ 的变化而改变的,对(26)~(31)的最优值函数在点 $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$ 处求导,求得其梯度为 $-(\lambda_{1T_s} H_2)^T$ 。那么模型在点 $\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}$ 处切线中的常数项和梯度为:

$$\alpha_T = \frac{1}{S_T} \sum_{s=1}^{S_T} Q_{T_s}(\bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}, \zeta_T^s) + \frac{1}{S_T} \sum_{s=1}^{S_T} (\lambda_{1T_s} H_2)^T \bar{X}_{T-1}^{\zeta_{T-1}}, \quad (33)$$

$$\beta_T^T = -\frac{1}{S_T} \sum_{s=1}^{S_T} (\lambda_{1T_s} H_2)^T. \quad (34)$$

但是由于 $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$ 的表达式无法求得,所以用 $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1})$ 来近似,其中 $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1})$ 是在(25)式中定义的。通过(33)~(34)式可得 $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1}) = \max\{\mathcal{Q}_T^{\zeta_{T-1}}(X_{T-1}), \alpha_T + \beta_T^T X_{T-1}\}$ 。

第 $T-1$ 阶段:

$$\min_{X_{T-1}} J_{T-1}(X_{T-1}, \zeta_{T-1}) + \mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1}), \quad (35)$$

$$\text{s. t. } H_1 X_{T-1} = H_2 \bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \quad (36)$$

$$A_4 X_{T-1} = A_5 X_{T-1}, \quad (37)$$

$$A_6 X_{T-1} \leq v_{T-1}, \quad (38)$$

$$X_{T-1} \geq 0. \quad (39)$$

目标函数(35)中的 $E[Q_T(X_{T-1}, \zeta_T)]$ 用切平面集 $\mathcal{Q}_T^{\zeta}(X_{T-1})$ 近似替代了,且约束(38)表示的是 $T-1$ 阶段的订购量约束,即 $v_{T-1} = (v_{11T-1}, \dots, v_{nmT-1}, \dots, v_{NMT-1})$ 。在 $T-1$ 阶段也可以求得模型在每种情景下的最优值 $Q_{T-1,s}(\bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \zeta_{T-1}^s)$ 和拉格朗日乘子 $\lambda_{1,T-1,s}, \lambda_{2,T-1,s}, s=1, \dots, S_{T-1}$, $E[Q_{T-1}(X_{T-2}, \zeta_{T-1})]$ 的切线表达式为:

$$\alpha_{T-1} + \beta_{T-1}^T X_{T-2}. \quad (40)$$

$$\text{其中 } \alpha_{T-1} = \frac{1}{S_{T-1}} \sum_{s=1}^{S_{T-1}} Q_{T-1,s}(\bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \zeta_{T-1}^s) + \frac{1}{S_{T-1}} \sum_{s=1}^{S_{T-1}} (\lambda_{1,T-1,s} H_2)^T \bar{X}_{T-2}^{\zeta_{T-2}}, \beta_{T-1}^T = -\frac{1}{S_{T-1}} \sum_{s=1}^{S_{T-1}} (\lambda_{1,T-1,s} H_2)^T.$$

将所求得的切线添加到切面集 $\mathcal{Q}_{T-1}^{\zeta}(X_{T-2})$ 中,即 $\mathcal{Q}_{T-1}^{\zeta}(X_{T-2}) = \max\{\mathcal{Q}_{T-1}^{\zeta_{T-2}}(X_{T-2}), \alpha_{T-1} + \beta_{T-1}^T X_{T-2}\}$ 。以此类推可以求得每一阶段的切平面集,直到第 1 阶段。

第 1 阶段:

$$\min_{X_1} J_1(X_1) + \mathcal{Q}_2^{\zeta}(X_1), \quad (41)$$

$$\text{s. t. } A_6 X_1 \leq v_1, \quad (42)$$

$$X_1 \geq 0. \quad (43)$$

求解得到第 1 阶段的最优解 X_1 和最优值 $Q_1(X_1)$, 而这里的最优值可以作为多阶段优化模型(24)的一个最优值下界,用 $z_1 = Q_1(X_1)$ 来表示。

2.2 SDDP 算法的前向步骤

SDDP 算法前向步骤是从前往后推进的一个过程。根据后向步骤中所求得的切平面集的表达式,从而可以求得新的最优解代入到计算中。由于在后向步骤中已经求得第 1 阶段新的最优解,所以直接将它作为新的迭代点 \bar{X}_1^{ζ} 代入到第 2 阶段进行计算。

第 2 阶段:

$$\min_{X_2} J_2(X_2, \zeta_2) + \mathcal{D}_3^c(X_2), \tag{44}$$

$$\text{s. t. } H_1 X_2 = H_2 \bar{X}_1^c, \tag{45}$$

$$A_4 X_2 = A_5 X_2, \tag{46}$$

$$A_6 X_2 \leq v_2, \tag{47}$$

$$X_2 \geq 0. \tag{48}$$

在此阶段,已知 $\mathcal{D}_3^c(X_2)$ 的表达式,同样可以求得最优解并作为新的迭代点 \bar{X}_2^c ,以此类推直到第 T 阶段。

第 T 阶段:

$$\min_{X_T} J_T(X_T, \zeta_T), \tag{49}$$

$$\text{s. t. } H_1 X_T = H_2 \bar{X}_{T-1}^c, \tag{50}$$

$$A_4 X_T = A_5 X_T, \tag{51}$$

$$X_T \geq 0. \tag{52}$$

可以求得阶段最优解为 X_T ,这样每一阶段所求得的最优解都可以作为新的迭代点用于后向步骤的计算。下面给出多阶段模型(24)的最优值上界。

$$z_2 = \sum_{t=1}^T E[J_t(\bar{X}_t^c, \zeta_t)] \tag{53}$$

通过比较 z_2 和 z_1 的大小,可以判断模型(21)是否求得最优解。算法步骤总结见图 6。

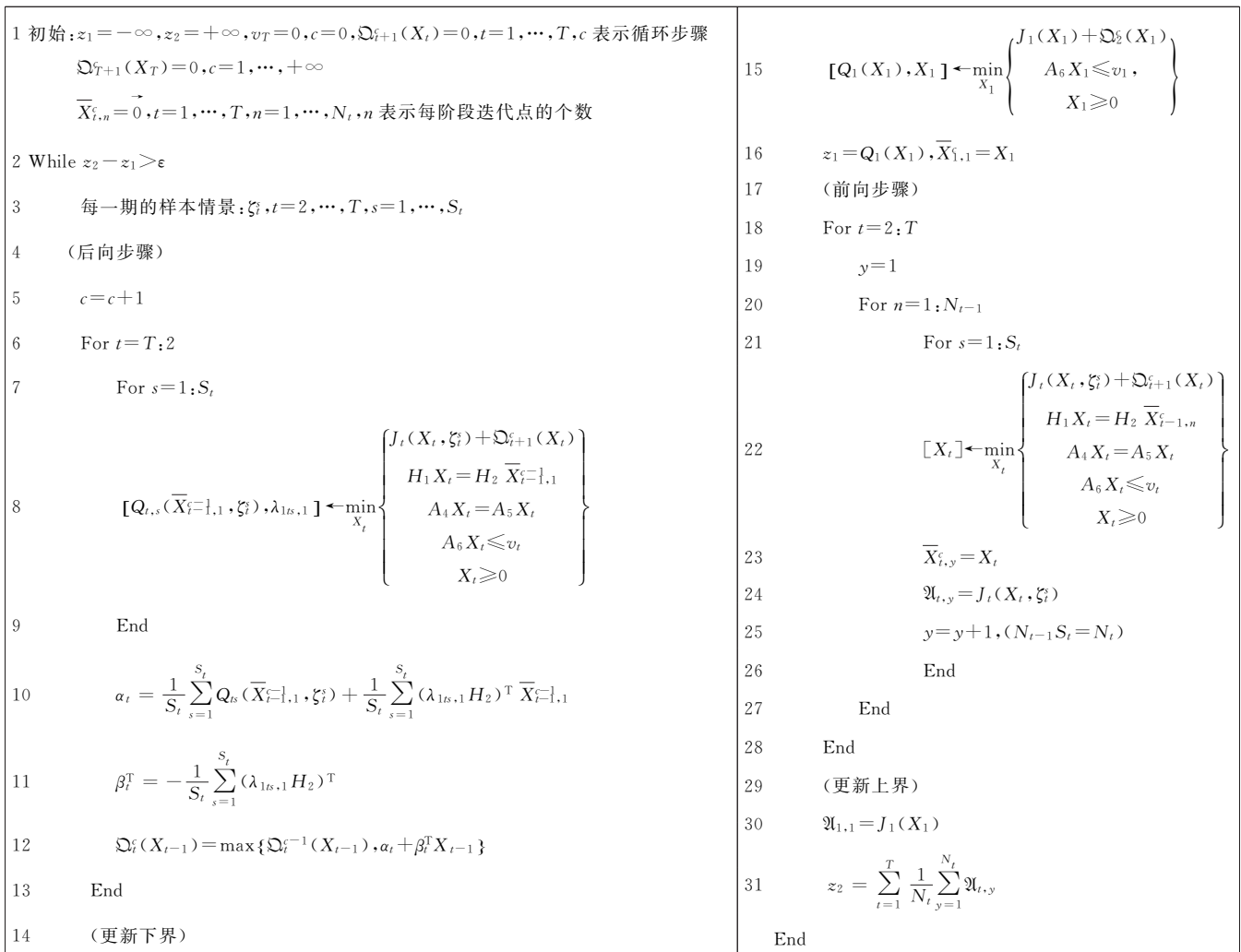


图 6 算法步骤

Fig. 6 Algorithm flowchart

3 案例分析

本节考虑 1 个含有单个制造中心, 3 个转运节点 ($L=3$), 3 个批发点 ($N=3$) 的物流网络。网络中赋予每条边一个编号, l_{0i} 表示的是从制造中心 ($k=0$) 到转运节点 ($k=1$) 的边, l_{ij} ($i=0, j=1, 2, 3$) 表示的是从制造中心到转运节点的边。同样地, l_{jr} ($j=1, 2, 3, r=4, 5, 6$) 表示的是从转运节点到批发点的边。这样总共定义了 12 条边, 如图 7 所示。在此基础上设置下面 3 个示例, 例 1 是物流网络下的单产品的多阶段随机库存问题, 将会分别构建两阶段、三阶段和四阶段模型, 为的是检测多阶段随机库存模型的优势。例 2 是物流网络下的多产品三阶段随机库存问题, 将会测试多阶段模型在中等规模样本情景数下的计算能力。例 3 则是考虑某些特殊情形下, 多阶段模型是否一定具有优势。

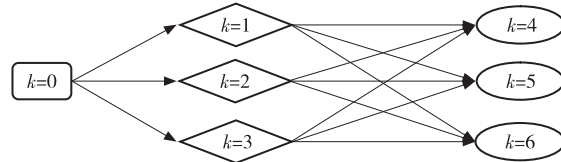


图 7 3 个转运节点、3 个批发点的物流网络
Fig. 7 Three transit nodes, three wholesale point transportation networks

例 1 物流网络下的单产品的多阶段随机库存问题。

本例中将整个销售阶段分为 4 个时期, 且只销售同一种产品。这里分别构建两阶段模型、三阶段模型和四阶段模型, 路况和价格中参数分别设置为 $\beta=1, \alpha=0.1$ 。其中四阶段模型在第 1 期的订购约束为 (85, 90, 95), 第 2 期的订购约束为 (95, 100, 105), 第 3 期的订购约束为 (100, 110, 120)。三阶段模型第 1 期的订购约束和四阶段模型一致, 而第 2 期的订购约束为 (195, 210, 225)。两阶段模型第 1 期的订购约束为 (280, 300, 320)。每条边的路况服从下列均匀分布:

$$\begin{aligned} & \text{CON}_{l_{01}t}, \text{CON}_{l_{02}t}, \text{CON}_{l_{03}t} \sim U(0.5, 1); \\ & \text{CON}_{l_{14}t}, \text{CON}_{l_{24}t}, \text{CON}_{l_{34}t} \sim U(0.4, 0.8); \\ & \text{CON}_{l_{15}t}, \text{CON}_{l_{25}t}, \text{CON}_{l_{35}t} \sim U(0.6, 1.2); \\ & \text{CON}_{l_{16}t}, \text{CON}_{l_{26}t}, \text{CON}_{l_{36}t} \sim U(0.7, 1.4) (t=2, 3, 4). \end{aligned}$$

这里每阶段抽取的样本量为 2, 其中表 2 给出每一期产品的市场不确定性。单位产品的生产成本这里设为 20, 且 3 个批发点前 3 期的单位库存成本分别为 ($h_{41t}=1, h_{51t}=1.2, h_{61t}=1.5, t=2, 3$), 由于最后一期以后产品无法销售, 这里定义各批发点最后一期的单位库存成本为 ($h_{n14}=20, n=4, 5, 6$)。则 3 种模型的最终盈利情况为: 两阶段模型盈利 3 469.2 万元; 三阶段模型盈利 3 999.8 万元; 四阶段模型盈利 4 271 万元。

另外本节考虑到在市场某些极端情景下 (如自然灾害或金融风暴等意外情况的发生), 产品的市场价格变动将会更大, 表 3 重新设置了与产品相关的市场不确定性。则 3 种模型在极端情况下的最终盈利情况为: 两阶段模型盈利 1 382.9 万元; 三阶段模型盈利 1 674.7 万元; 四阶段模型盈利 1 937.3 万元。

由得到的数据可知, 模型随着阶段数的增加总体盈利也在不断地提高。在市场较为平稳的时候, 四阶段模型和三阶段模型盈利额的差距占四阶段模型总体盈利的比例并不大, 但是当市场出现极端情景的时候, 这时会发现四阶段模型与三阶段模型、两阶段模型盈利额的差距占四阶段模型总体盈利的比例均增加了。这说明随着市场不确定性的增加, 多阶段模型的优势将会更加明显。

表 2 产品的市场不确定性
Tab. 2 Market uncertainty of products

期数	情景	未来不确定市场情景的取值
第 2 期	情景 1	$\xi_{112}=300, \xi_{512}=310, \xi_{612}=330$
	情景 2	$\xi_{112}=340, \xi_{512}=350, \xi_{612}=360$
第 3 期	情景 1	$\xi_{113}=320, \xi_{513}=330, \xi_{613}=350$
	情景 2	$\xi_{113}=345, \xi_{513}=360, \xi_{613}=380$
第 4 期	情景 1	$\xi_{113}=310, \xi_{513}=355, \xi_{613}=380$
	情景 2	$\xi_{113}=350, \xi_{513}=405, \xi_{613}=420$

表 3 极端情景下产品的市场不确定性
Tab. 3 Market uncertainty of products in extreme scenarios

期数	情景	未来不确定市场情景的取值
第 2 期	情景 1	$\xi_{112}=98, \xi_{512}=100, \xi_{612}=108$
	情景 2	$\xi_{112}=310, \xi_{512}=350, \xi_{612}=360$
第 3 期	情景 1	$\xi_{113}=130, \xi_{513}=141, \xi_{613}=152$
	情景 2	$\xi_{113}=350, \xi_{513}=380, \xi_{613}=430$
第 4 期	情景 1	$\xi_{113}=133, \xi_{513}=152, \xi_{613}=164$
	情景 2	$\xi_{113}=390, \xi_{513}=450, \xi_{613}=490$

例 2 物流网络下的多产品三阶段随机库存问题。

在这个例子中,每个批发点销售 3 种不同的产品,并将整个销售阶段划分为 3 个时期,只在第 1 期和第 2 期订购产品,第 3 期不订购。三阶段模型在第 1 期的订购约束为(85,90,95,90,100,105,95,110,115),第 2 期的订购约束为(95,100,105,100,105,110,105,110,120),其中路况和价格中参数的设置分别为 $\beta=1, \alpha=0.1$,且每条边路况的设置与例 1 中的相同,这里不再列出。3 种产品的生产成本此处为 $c_1=20, c_2=21, c_3=22$ 。该产品在每个批发点的市场不确定性都服从下列均匀分布 $\xi_{n1t} \sim U(300,350), \xi_{n2t} \sim U(310,360), \xi_{n3t} \sim U(330,380)(t=2,3, n=4,5,6)$ 。3 个批发点销售的 3 种产品在第 2 期的库存成本分别为 $h_{n12}=1, h_{n22}=1.2, h_{n32}=1.5, n=4,5,6$,由于最后一期之后产品无法销售这里定义各批发点最后一期库存成本为 $h_{n13}=20, h_{n23}=21, h_{n33}=22, n=4,5,6$ 。这里每一期抽取样本量为 10,50,100 的 3 组独立同分布样本,构造样本均值逼近问题并进行求解。表 4 根据每一期产生的样本数,分别计算三阶段模型的最终盈利情况和运算时间。

表 4 中的计算结果说明了该模型也可以解决中等规模的问题。根据文献[21]可知:随着样本量的增加,样本均值逼近多阶段库存问题的最优解是收敛到随机变量服从连续分布的原问题的最优解。从表中也可以发现运算时间是随着情景的增加而快速增长的。由于该问题天然具有并行计算的结构,可以采用并行计算的方式降低求解时间,这将是下一阶段的研究方向。

表 4 不同样本情景数下的最终盈利和运算时间
Tab.4 Final profit and calculation time under different sample scenarios

样本数/个	计算时间/min	盈利/万元
10	7.53	6 027
50	147.86	5 958.6
100	589.44	5 944.6

例 3 针对某些特殊情形研究物流网络下的单产品的多阶段随机库存问题。

本例中也将整个销售阶段分为 4 个时期,且每个批发点同样只销售同一种产品。这里构建三阶段模型和四阶段模型,且每一期只考虑两种随机情景,而每期产品的市场不确定性同例 1 中的表 2 一致。四阶段模型第 1 期的订购约束为(80,90,100),第 2 期的订购约束为(90,100,110),第 3 期的订购约束为(95,105,110)。三阶段模型第 1 期的订购约束和四阶段模型一致,第 2 期的订购约束为(185,205,220)。第 2 期和第 3 期每条边的路况服从下列分布:

$$\begin{aligned} & \text{CON}_{l_{01}t}, \text{CON}_{l_{02}t}, \text{CON}_{l_{03}t} \sim U(0.5, 1); \\ & \text{CON}_{l_{14}t}, \text{CON}_{l_{24}t}, \text{CON}_{l_{34}t} \sim U(0.4, 0.8); \\ & \text{CON}_{l_{15}t}, \text{CON}_{l_{35}t} \sim U(0.6, 1.2); \\ & \text{CON}_{l_{16}t}, \text{CON}_{l_{26}t}, \text{CON}_{l_{36}t} \sim U(0.7, 1.4)(t=2,3)。 \end{aligned}$$

这里需要注意的是,将第 4 期的路况考虑为特殊情形(道路塌陷、大型车祸等),第 4 期路况分布如下:

$$\begin{aligned} & \text{CON}_{l_{01}4}, \text{CON}_{l_{02}4}, \text{CON}_{l_{03}4} \sim U(5, 10); \\ & \text{CON}_{l_{14}4}, \text{CON}_{l_{24}4}, \text{CON}_{l_{34}4} \sim U(4, 8); \\ & \text{CON}_{l_{15}4}, \text{CON}_{l_{25}4}, \text{CON}_{l_{35}4} \sim U(6, 12); \\ & \text{CON}_{l_{16}4}, \text{CON}_{l_{26}4}, \text{CON}_{l_{36}4} \sim U(7, 14)。 \end{aligned}$$

单位生产成本和单位库存成本的设置与例 1 相同,这里就不再一一列出。则三阶段模型的最终盈利为 3 999 万元,四阶段模型的最终盈利为 3 899.2 万元,此时三阶段模型的最终盈利情况要高于四阶段模型,且四阶段模型在第 3 期的订购决策为批发点 1,2,3 的产品订购量均为 0。

原本四阶段模型比三阶段模型拥有更大的决策空间,但是由于第 4 期物流网络中的路况极差,导致单位运输成本极速上升,使得批发点在第 3 期没有任何订购量。但是三阶段模型在第 2 期的订购量限制要高于四阶段模型,即三阶段模型可以在第 3 期存储更多的货物以便批发点在第 4 期进行售卖。以上说明了在某些特殊情形中,多阶段模型并不一定具有更大优势。

4 总结

本文在已有的库存问题研究的基础上,将物流网络中的运输问题引入到多阶段库存模型中,构建了一个物流网络下的多产品多阶段随机库存模型,并证明了在一定条件下随着阶段数的增加,模型的收益也会随之增加。

本文进一步运用 SDDP 算法对模型进行求解,并通过比较两阶段模型、三阶段模型和四阶段模型最终盈利情况,验证了随着阶段数的增加,模型收益也会逐渐增加的理论结果。本文还测试了该模型也能解决中等规模的问题。并且展示了在本文条件不满足的情况下,多阶段模型的收益未必会随着阶段数的增加而增加。本文中所构建的物流网络下的多产品多阶段随机库存模型可以在不确定的市场环境下,更好的对抗未来的风险,具有重要的现实意义。此外,在本文研究的基础上还可以继续讨论多产品多阶段的风险厌恶模型,以及如何更加有效的求解模型。

参考文献:

- [1] DVORETZKY A, KIEFER J, WOLFOWITZ J. The inventory problem: ii. case of unknown distributions of demand [J]. *Econometrica*, 1952, 20(3): 450-466.
- [2] ABBOU R, LOISEAU J J, MOUSSAOUI C. Robust inventory control of production systems subject to uncertainties on demand and lead times [J]. *International Journal of Production Research*, 2017, 55(8): 2177-2196.
- [3] 高婷,叶涛锋,陈福明.需求依赖库存时基于 CVaR 准则的报童模型 [J]. *中国管理科学*, 2016, 24: 602-608.
GAO T, YE T F, CHEN F M. Newsboy model based on CVaR criterion when demand depends on inventory [J]. *China Management Science*, 2016, 24: 602-608.
- [4] KITAEVA A, LIVSHITS K, ULYANOVA E. The multi-product newsboy problem with price-depended demand and fastmoving items [J]. *Communications in Computer and Information Science*, 2017, 800: 297-311.
- [5] TORKAMAN S, GHOMI S M T F, KARIMI B. Multi-stage multi-product multi-period production planning with sequence-dependent setups in closed-loop supply chain [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2017, 113: 602-613.
- [6] 陈杰,陈志祥.具有多元马氏需求的多产品多阶段库存优化模型 [J]. *中国管理科学*, 2015, 23(5): 151-160.
CHEN J, CHEN Z X. Multi-product multi-stage inventory optimization model with multiple Markov requirements [J]. *China Management Science*, 2015, 23(5): 151-160.
- [7] POOYA A, PAKDAMAN M. A delayed optimal control model for multi-stage production-inventory system with production lead times [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2018, 94: 751-761.
- [8] HU Z, HU G. A multi-stage stochastic programming for lot-sizing and scheduling under demand uncertainty [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 119: 157-166.
- [9] CHANG S C, CHANG C T. A multi-stage and multi-supplier inventory model allowing different order quantities [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 52: 613-625.
- [10] KEIZER M D, AKKERMAN R, GRUNOW M, et al. Logistics network design for perishable products with heterogeneous quality decay [J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 262: 535-549.
- [11] CHEONG M L F, BHATNAGAR R, GRAVES S C. Logistics network design with supplier consolidation hubs and multiple shipment options [J]. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2007, 3(1): 51-69.
- [12] FATTAHI M, GOVINDAN K. Integrated forward/reverse logistics network design under uncertainty with pricing for collection of used products [J]. *Annals of Operations Research*, 2017, 253: 193-225.
- [13] BOZORGIRAD S, DESA M I, WIBOWO A. Genetic algorithm enhancement to solve multi source multi product flexible multistage logistics network [J]. *International Journal of Computer Science Issues*, 2012, 9(3): 157-164.
- [14] SHAPIRO A, DENTCHEVA D, RUSZCZYNSKI A. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory* [M]. 2nd Edition. Philadelphia, USA: SIAM, 2014.
- [15] PEREIRA M V F, PINTO L M V G. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: a decomposition approach [J]. *Water Resources Research*, 1985, 21(6): 779-792.
- [16] SHAPIRO A, TEKAYA W, da COSTA J P, et al. Risk neutral and risk averse stochastic dual dynamic programming method [J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 224: 375-391.
- [17] REBENNACK S. Combining sampling-based and scenario-based nested Benders decomposition methods: application to stochastic dual dynamic programming [J]. *Mathematical Programming*, 2016, 156: 343-389.
- [18] DUPAČOVÁ J, KOZMÍK V. SDDP for multistage stochastic programs: preprocessing via scenario reduction [J]. *Computational Management Science*, 2017, 14: 67-80.
- [19] BRANDI R B S, MARCATO A L M, DIAS B H, et al. A convergence criterion for stochastic dual dynamic programming: application to the long-term operation planning problem [J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2018, 33(4): 3678-3690.
- [20] PHILPOTT A B, MATOS V L D, KAPELEVICH L. Distributionally robust SDDP [J]. *Computational Management Science*, 2018, 15(3/4): 431-454.
- [21] KLEYWEGT A J, SHAPIRO A, HOMEM-DE-MELLO

T. The sample average approximation method for stochastic discrete optimization [J]. Siam Journal on Optimization, 2002, 12(2): 479-502.

Operations Research and Cybernetics

Multi-Product Multi-Stage Stochastic Inventory Problem Under Logistics Network

LIU Fengnian¹, FU Yongbin¹, SUN Hailin²

(1. School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094;

2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: [Purposes] The monopoly manufacturer with production, transportation and wholesale makes reasonable decisions, including production, sales, inventory and transportation for a variety of products under uncertain environment. [Methods] The prices and transport conditions of products transported in a complex logistics network are affected by the uncertainty of markets and road condition. With this background, a multi-product multi-stage stochastic inventory model under a logistics network is proposed and is solved by Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP) algorithm. [Findings] 1) Theoretical analysis proves that the more the number of stages of the multi-stage stochastic inventory model, the higher the return under certain conditions. 2) The results of numerical experiments show that the final return of the multi-stage stochastic inventory model will gradually increase with the increase of the number of stages under certain conditions. However, when the given conditions are not met, the multi-stage stochastic inventory model may not have advantages. [Conclusions] The multi-product multi-stage stochastic inventory model under the logistics network can confront future risks better under uncertain environment and has a profound and far reaching significance.

Keywords: multi-stage inventory problem; logistics network; SDDP; product pricing

(责任编辑 黄 颖)

模糊环境下物流服务供应链订单分配问题研究*

胡彦勇, 范志强

(河南理工大学 工商管理学院 能源经济研究中心, 河南 焦作 454000)

摘要:【目的】针对物流服务供应链订单分配问题,考虑订单分配问题的动态性与模糊性,使所建模型更符合实际情况,提高方案可行性。【方法】将物流服务供应商物流能力供给量与物流服务集成商物流能力需求量设为模糊不确定变量,建立模糊环境下的订单分配模型,以最小化物流服务集成商订单分配成本为优化目标,利用可行性理论进行清晰等价式转换,最后通过Lingo 11.0软件进行模拟运算。【结果】通过置信水平灵敏度分析,得出置信水平与订单分配成本之间的关系,能为物流服务集成商提供一定的决策支持。【结论】物流服务集成商在制定订单分配方案时,置信水平应设置在0.5以上,以使分配方案不过度偏离实际情况,增加方案可行性。又要注重置信水平与成本之间的关系,选择适合自身需求的置信水平。

关键词:模糊环境;物流服务供应链;订单分配;可信性理论

中图分类号:O29;F253

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)05-0035-07

1 研究背景

物流服务供应链伴随着互联网信息化的进步和社会需求的发展应运而生,物流服务供应链的出现极大提升了物流服务资源的利用率,减少了社会资源的闲置浪费。随着客户服务需求多样化、服务要求高质量化的发展,物流服务集成商订单分配决策的重要性日益凸显。订单分配是物流服务供应链的一个核心问题,良好的物流服务供应链管理必须要充分利用物流服务集成商的主导优势,明确客户需求及各供应商供给优势,实现供应链上各参与主体利益最大化。

物流服务供应链基本运作结构由功能型物流服务供应商、物流服务集成商、物流服务需求方所组成。物流服务供应链是指为了满足物流服务需求客户日益多样化、个性化、质量化的物流能力需求,物流服务集成商招募具备一种或多种物流功能的物流服务供应商组成合作伙伴联盟,向终端客户提供综合性的物流服务。目前,关于物流服务供应链的研究多集中在质量协调^[1-2]、契约协调^[3-4]、供应商选择^[5-6]等方面。在订单分配研究方面,已有许多中外学者和企业管理者进行了广泛研究。张广胜等人^[7]研究认为物流服务集成商如何在最短时间内合理分配订单任务,及时满足客户需求对保证物流服务供应链长期稳定运作起到关键性作用;Liu等人^[8]建立了一个考虑物流能力需求动态更新和物流服务供应商公平性偏好的两阶段订单分配模型,采用理想点法进行订单分配优化;谢乃明等人^[9]提出了一种云平台主导的集成调度模式,以云平台充当“传统集成商”的角色,构建了跨供应商订单分配优化模型,并设计了一种改进遗传算法进行求解。

上述对物流服务供应链的订单分配问题研究大部分都假定了所有信息是确定已知的,只有少量文献研究了单一不确定因素下的订单分配问题,如吴晓研等人^[10]研究了物流能力随机条件下的订单分配优化,但鲜有文献对多重不确定因素下的订单分配问题进行研究。然而在实际的物流服务供应链运作过程中面临着大量不确定因素的干扰,既包括主观因素、客观因素,也包括内部因素、外部因素。因此,订单分配决策也受到多重不确定因

* 收稿日期:2019-03-30 修回日期:2019-05-10 网络出版时间:2019-09-26 11:24

资助项目:国家自然科学基金(No. 71502050);河南省教育厅科学技术研究重点项目应用计划(No. 15A630066);河南省哲学社会科学规划项目(No. 2018BJJ023);河南省政府决策研究招标课题(No. 2018B017)

第一作者简介:胡彦勇,男,研究方向为供应链系统优化与仿真;E-mail: 211713020004@home.hpu.edu.cn;通信作者:范志强,男,讲师,博士,E-mail:1358508328@qq.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1123.004.html>

素的影响。鉴于此,本文在前述研究的基础上,针对物流服务供应链管理的核心内容“订单分配问题”展开研究,考虑多重不确定因素,对模糊环境下的物流服务供应链进行订单分配优化,以期为物流服务集成商提供决策支持。物流服务集成商在制定订单分配方案时只有充分考虑运作过程中存在的不确定因素,才能合理利用资源,对订单进行科学分配,满足终端客户的物流需求,提升物流服务供应链服务水平,增加客户满意度。因此对于物流服务供应链进行模糊环境下的订单分配研究具有重要的理论意义及应用价值^[11]。

2 问题描述与模型建立

2.1 问题描述

在一条由一个物流服务集成商和多个物流服务供应商以及物流能力需求客户群组成的三级物流服务供应链上,物流服务集成商向物流服务需求客户收集物流订单,并将这些订单按着某些标准合理地分配给物流服务提供商,使在满足客户需求的情况下追求运作成本最小化。物流服务供应链基本结构如图 1 所示。物流服务供应链在现实市场竞争环境下面对的不确定因素很多,而且相互之间关系复杂,为了使研究情况更符合实际,本文研究的多周期多物流能力需求的动态订单分配问题,将物流服务供应商的供给能力、物流服务集成商物流能力需求量设定为模糊不确定数,进行模糊环境下的物流服务供应链订单分配问题研究。

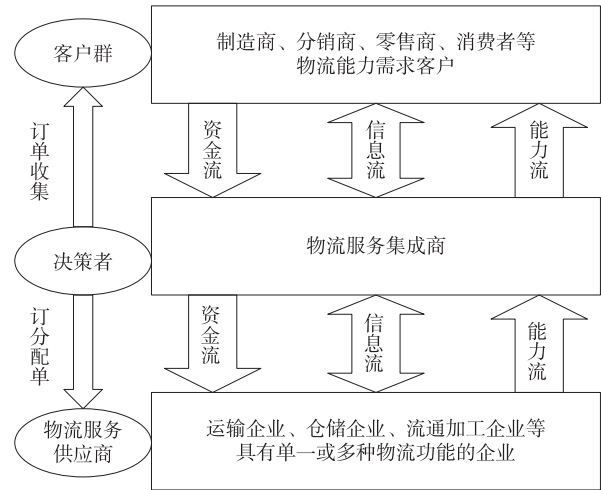


图 1 物流服务供应链基本结构

Fig. 1 Basic structure of logistics service supply chain

2.2 符号说明

为方便建立模糊环境下物流服务供应链订单分配问题的数学模型,对模型的假设以及相应的参数设置如下。 $S = \{1, 2, \dots, s\}$ 表示物流服务供应商的集合; $I = \{1, 2, \dots, i\}$ 表示物流任务的集合; $T = \{1, 2, \dots, t\}$ 表示订单分配计划周期的集合; \tilde{e}_{sit} 为物流服务供应商 s 在周期 t 时具备物流任务 i 所需物流能力的模糊可供给量; \tilde{D}_i 为物流服务集成商在周期 t 时对物流任务 i 能力类型的模糊需求量; j_{sit} 为物流服务供应商 s 对周期 t 时物流任务 i 的单位服务报价; η 为物流服务集成商随物流能力采购成本的多少而需支付的交易费用支出比例; l_{si} 为物流服务供应商 s 完成物流任务 i 的延迟服务率; α 为物流服务集成商因物流服务供应商的延迟服务而造成的单位损失成本; f_{sit} 为服务水平合格率,即服务供应商 s 在周期 t 时完成物流任务 i 时的服务水平达标部分与所需物流服务水平之间的比率; β 为物流服务集成商因物流服务供应商的服务水平未满足要求而付出的单位惩罚成本; L_i 为物流任务 i 可接受的最大延迟服务率; F_0 为物流服务集成商在各分配周期内所要求的完成物流任务的服务水平合格率。另有决策变量: x_{sit} 表示在周期 t 时,物流服务集成商分配给物流服务供应商 s 关于物流任务 i 的具体任务量; y_{sit} 为二元决策变量,即当周期 t 物流服务供应商 s 被选中去完成物流任务 i 时为 1, 否则,取值为 0。

2.3 模型建立

根据上述符号说明,可求得各分配周期内总采购成本为 $\sum_s \sum_i \sum_t j_{sit} x_{sit}$, 总交易费用为 $\sum_s \sum_i \sum_t \eta j_{sit} x_{sit} y_{sit}$, 延迟交付损失成本为 $\sum_s \sum_i \sum_t \alpha l_{si} x_{sit}$, 服务水平不足惩罚成本为 $\sum_s \sum_i \sum_t \beta (1 - f_{sit}) x_{sit}$ 。因此得到使物流服务集成商总成本最小的 0-1 混合整数模糊动态非线性多目标订单分配模型如下:

$$\min W = \sum_s \sum_i \sum_t j_{sit} x_{sit} + \sum_s \sum_i \sum_t \eta j_{sit} x_{sit} y_{sit} + \sum_s \sum_i \sum_t \alpha l_{si} x_{sit} + \sum_s \sum_i \sum_t \beta (1 - f_{sit}) x_{sit} \quad (1)$$

约束条件:

$$\sum_s x_{sit} y_{sit} \geq \tilde{D}_i, \forall i, t, \quad (2)$$

$$x_{sit} \leq \tilde{e}_{sit}, \forall s, i, t, \quad (3)$$

$$f_{sit} \geq F_0 y_{sit}, \forall s, i, t, \quad (4)$$

$$\sum_s \sum_t l_{si} x_{sit} \leq L_i \sum_t \tilde{D}_{i2}, \forall i, \tag{5}$$

$$x_{sit} \geq 0, \forall s, i, t, \tag{6}$$

$$y_{sit} = \{0, 1\}, \forall s, i, t. \tag{7}$$

约束(2)保证了各周期内的物流任务都被完成;约束(3)限制了物流服务供应商在各周期内的订单分配量应不大于自身的模糊可供应量;约束(4)限制了各物流服务供应商在每个分配周期内的服务水平合格率满足物流服务集成商要求;约束(5)限制了各周期内延迟交付总量不大于规定的最大水平;约束(6)与约束(7)为决策变量的取值范围。

3 求解模型

3.1 模型清晰等价转化

由于约束条件中含有不确定变量,如果采用确定型模型进行求解,只能通过设定一些假设条件对问题进行简化,这就会造成模型与现实情况的脱节,因此不能采用常规的确定型方法对目标函数(1)式直接进行求解,而需要进一步研究模糊环境下的目标优化方法。为了求解该模型,本文假设所有不确定参数均为三角模糊数,针对该问题,基于文献[12-15]的研究基础,引入可信性理论,设置置信水平参数,结合问题实际情况,置信水平越大,决策者物流服务集成商的满意度越高,因此置信水平参数均设置为大于 0.5。就此运用可信性理论对含有三角模糊数的目标函数及约束条件进行清晰等价转化。

引理 1^[16] 设 δ 为三角模糊变量 (u_1, u_2, u_3) ($u_1 < u_2 < u_3$), 则对给定的置信水平 ξ ($0.5 < \xi \leq 1$), 有:

$$Cr\{\delta \leq u\} \geq \xi \Leftrightarrow u \geq 2(1-\xi)\delta_2 + (2\xi-1)\delta_3. \tag{8}$$

引理 2^[16] 设 δ 为三角模糊变量 (u_1, u_2, u_3) ($u_1 < u_2 < u_3$), 则对给定的置信水平 λ ($0.5 < \lambda \leq 1$), 有:

$$Cr\{\delta \geq u\} \geq \lambda \Leftrightarrow u \leq (2\lambda-1)\delta_1 + 2(1-\lambda)\delta_2. \tag{9}$$

基于引理 1, 约束条件(2)可以转化为清晰等价式(10); 同理, 基于引理 2, 约束条件(3)与(5)可以转化为清晰等价式(11)与(12)。

$$\sum_s x_{sit} y_{sit} \geq 2(1-\xi)D_{i2} + (2\xi-1)D_{i3}, \forall i, t, \tag{10}$$

$$x_{sit} \leq (2\lambda-1)e_{sit1} + 2(1-\lambda)e_{sit2}, \forall s, i, t, \tag{11}$$

$$\sum_s \sum_t l_{si} x_{sit} \leq (2\lambda-1)L_i \sum_t D_{i1} + 2(1-\lambda)L_i \sum_t D_{i2}, \forall i. \tag{12}$$

3.2 模型的清晰等价形式

采用上述方法,模糊环境下物流服务供应链订单分配模型可以转化为如下清晰等价形式:

$$\begin{aligned} \min W = & \sum_s \sum_i \sum_t j_{sit} x_{sit} + \sum_s \sum_i \sum_t \eta j_{sit} x_{sit} y_{sit} + \\ & \sum_s \sum_i \sum_t a l_{si} x_{sit} + \sum_s \sum_i \sum_t \beta (1 - f_{sit}) x_{sit}. \end{aligned} \tag{13}$$

$$\text{s. t. } \sum_s x_{sit} y_{sit} \geq 2(1-\xi)D_{i2} + (2\xi-1)D_{i3}, \forall i, t, \tag{14}$$

$$x_{sit} \leq (2\lambda-1)e_{sit1} + 2(1-\lambda)e_{sit2}, \forall s, i, t, \tag{15}$$

$$f_{sit} \geq F_0 y_{sit}, \forall s, i, t, \tag{16}$$

$$\sum_s \sum_t l_{si} x_{sit} \leq (2\lambda-1)L_i \sum_t D_{i1} + 2(1-\lambda)L_i \sum_t D_{i2}, \forall i, \tag{17}$$

$$x_{sit} \geq 0, \forall s, i, t, \tag{18}$$

$$y_{sit} = \{0, 1\}, \forall s, i, t. \tag{19}$$

4 数值算例

4.1 算例分析

在一条由 4 个物流服务供应商(分别用 S_1, S_2, S_3 和 S_4 表示)和 1 个物流服务集成商组成的物流服务供应链

上,以物流服务集成商为核心进行模糊环境下的订单分配问题研究。由于受市场竞争、复杂经营环境等众多不可控的人为与自然因素的影响,物流服务供应商的可供量与物流服务集成商对物流能力的需求量往往都是模糊不确定的。根据以往经验并统计历史数据,物流服务集成商可以获得物流服务供应商在各个时期的模糊可供量、模糊需求量。在此算例中,订单分配周期为 4 周期,对 3 种物流任务(I_1, I_2, I_3)进行订单分配研究。为了避免物流服务集成商在模糊环境下面临的风险过大,为提升物流服务集成商对分配方案的满意度,故将文中的置信水平取值均不小于 0.5,假设置信水平 ξ, λ 均取为 0.8。各分配期内交易费用支出比例为 $\eta=3\%$;因延迟服务所造成的单位损失成本为 $a=5$ 元;因服务水平不足所付出的单位惩罚成本为 $\beta=5$ 元;分配期内各任务允许的最大延迟服务率为 $L_1=0.085, L_2=0.070, L_3=0.080$;服务水平合格率 F_0 设为 0.92。表 1 给出了各周期物流服务供应商的模糊可供量;表 2 为各周期内物流能力模糊需求量;各物流服务供应商的延迟服务率见表 3;表 4 为各分配期内单位服务报价 j_{sit} 和服务水平合格率 f_{sit} 的取值。利用 Lingo 11.0 软件对模型进行求解,结果如表 5 所示,得到最小分配成本为 66 652.27 元。

通过表 5 可以看出,在第 1 分配周期内,物流服务供应商 1 所分配到的订单量:任务 1 为 74,任务 2 为 59;物流服务供应商 2 所分配到的订单量:任务 1 为 80,任务 3 为 38;物流服务供应商 3 所分配到的订单量:任务 2 为 134,任务 3 为 58;物流服务供应商 4 所分配到的任务量为:任务 1 为 58,任务 3 为 86。周期 1 内的总需求为 587,总成本为 16 968.99 元。同理,可以看到其他分配周期内各物流服务供应商所分配到的各任务的订单量以及周期成本。现对各周期的物流能力需求量与周期成本关系进行分析,如图 2 所示。

由图 2 可以看出,各分配周期内物流能力的需求量与分配成本呈现出相对一致的变化趋势,这是因为在其他成本保持不变的情况下,随着各类型物流能力需求的增加,总订单分配成本就会相应增加;随着各类型物流能力需求的减少,总订单分配成本也会相应减少,这与实际情况相符。

表 1 各周期物流服务供应商的模糊可供量 \tilde{e}_{sit} 的取值Tab. 1 The value of the fuzzy supply \tilde{e}_{sit} of each logistics service provider in each cycle

\tilde{e}_{sit}	$i=1$	$i=2$	$i=3$	
$s=1$	$t=1$	(70,80,90)	(60,70,80)	(70,80,90)
	$t=2$	(90,110,130)	(100,120,140)	(80,90,100)
	$t=3$	(40,50,60)	(70,80,90)	(50,70,90)
	$t=4$	(30,40,50)	(70,90,110)	(90,100,110)
$s=2$	$t=1$	(100,110,120)	(50,60,70)	(30,50,70)
	$t=2$	(90,100,110)	(100,120,140)	(80,100,120)
	$t=3$	(30,50,70)	(60,80,100)	(40,60,80)
	$t=4$	(50,60,70)	(70,80,90)	(70,90,110)
$s=3$	$t=1$	(80,90,100)	(130,140,150)	(50,70,90)
	$t=2$	(60,80,100)	(90,100,110)	(80,100,120)
	$t=3$	(50,70,90)	(80,90,100)	(70,80,90)
	$t=4$	(70,90,110)	(150,160,170)	(30,50,70)
$s=4$	$t=1$	(50,70,90)	(40,50,60)	(100,110,120)
	$t=2$	(80,90,100)	(80,100,120)	(80,90,100)
	$t=3$	(80,100,120)	(60,80,100)	(70,90,100)
	$t=4$	(90,100,110)	(70,80,90)	(100,110,120)

表 2 各周期内物流能力模糊需求量 \tilde{D}_{it} 的取值Tab. 2 The value of fuzzy demand for \tilde{D}_{it} in each cycle

\tilde{D}_{it}	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$t=1$	(180,200,220)	(185,190,195)	(150,170,190)
$t=2$	(200,220,240)	(160,180,200)	(220,230,240)
$t=3$	(130,150,170)	(100,110,120)	(160,180,200)
$t=4$	(130,140,150)	(200,210,220)	(200,220,240)

表 3 延迟服务率 l_{si} 的取值Tab. 3 Delayed service rate l_{si} value

l_{si}	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$s=1$	0.02	0.06	0.09
$s=2$	0.07	0.08	0.07
$s=3$	0.15	0.07	0.08
$s=4$	0.09	0.08	0.06

4.2 置信水平灵敏度分析

首先分析当置信水平 ξ 与 λ 取值相同时(即 $\xi=\lambda$),对目标函数值的影响,置信水平 $\xi=\lambda$ 分别取值为 0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1 时,目标函数值的变化如图 3 所示。

由图 3 所示,订单分配总成本随着置信水平的提高而增加(其中,当 $\xi=\lambda$ 取值为 0.9 与 1 时,目标函数值无解)。这是因为随着置信水平的提高,约束条件变得更加严格,当置信水平越趋近于 1,模糊约束条件越趋近于确定型约束条件。当置信水平为 1 时,模糊环境下的约束条件将转化为确定环境下的约束。因此,物流服务集成商在制定分配方案时,置信水平应设置在 0.5 以上,以使分配方案不过度偏离实际情况,增加方案可行性。还要注重置信水平与成本之间的关系,选择适合自身需求的置信水平。

其次,以第 1 分配周期分配方案为例,分析置信水平 ξ 与 λ 取值不相同对目标函数值 W 的影响, $W1$ 为 $\xi=0.8, \lambda$ 分别取值 0.2,0.4,0.6,0.8,1 时的第 1 周期分配成本; $W2$ 为 $\lambda=0.8, \xi$ 分别取值 0.2,0.4,0.6,0.8,1 时的第 1 周期分配成本。第 1 周期内置信水平与分配成本的关系如图 4 所示。

由图 4 可以看出,当 λ 取值固定为 0.8 时,随着置信水平 ξ 的增大,分配成本 $W2$ 也随之增大。经分析,这是因为随着 ξ 的

表 4 各分配期内单位服务报价 j_{sit} 和服务水平合格率 f_{sit} 的取值

Tab. 4 The value of unit service quotation j_{sit} and service level pass rate f_{sit} in each allocation period

	j_{sit}	$i=1$	$i=2$	$i=3$	f_{sit}	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$s=1$	$t=1$	25	30	32	$t=1$	0.95	0.93	0.92
	$t=2$	25	30	32	$t=2$	0.95	0.93	0.92
	$t=3$	25	30	32	$t=3$	0.95	0.93	0.92
	$t=4$	25	30	32	$t=4$	0.95	0.93	0.92
$s=2$	$t=1$	30	28	26	$t=1$	0.96	0.90	0.98
	$t=2$	30	28	26	$t=2$	0.96	0.90	0.98
	$t=3$	30	28	26	$t=3$	0.96	0.90	0.98
	$t=4$	30	28	26	$t=4$	0.96	0.90	0.98
$s=3$	$t=1$	22	25	27	$t=1$	0.88	0.92	0.95
	$t=2$	22	25	27	$t=2$	0.88	0.92	0.95
	$t=3$	22	25	27	$t=3$	0.88	0.92	0.95
	$t=4$	22	25	27	$t=4$	0.88	0.92	0.95
$s=4$	$t=1$	28	29	30	$t=1$	0.96	0.87	0.93
	$t=2$	28	29	30	$t=2$	0.96	0.87	0.93
	$t=3$	28	29	30	$t=3$	0.96	0.87	0.93
	$t=4$	28	29	30	$t=4$	0.96	0.87	0.93

表 5 决策变量 x_{sit} 的求解结果

Tab. 5 Solution result of decision variable x_{sit}

周期	x_{sit}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	总成本/元
$t=1$	$i=1$	74	80	0	58	16 968.99
	$i=2$	59	0	134	0	
	$i=3$	0	38	58	86	
$t=2$	$i=1$	98	50	0	84	18 984.08
	$i=3$	0	88	88	60	
$t=3$	$i=1$	44	30	0	88	13 544.2
	$i=2$	32	0	84	0	
	$i=3$	0	48	74	70	
$t=4$	$i=1$	34	18	0	94	17 155
	$i=2$	62	0	154	0	
	$i=3$	12	78	38	104	

增大,使得对满足需求的约束更为严格。当 $\xi=1$ 时,表示物流服务集成商的物流能力需求必须得到满足。因此,此时物流订单分配成本最高,这与现实情况相符。当固定 ξ 的取值为 0.8 时,随着置信水平 λ 的增大,分配成本 $W1$ 也随之增大($\lambda=1$ 时,无解),但增幅却小于 $W2$,这是因为 ξ 制约着需求约束的严格程度, λ 制约着供给约束的严格程度。此时 ξ 取值是确定的,需求范围也是确定的。当物流服务供应商的物流能力供应量满足物流服务集成商的最低需求时,随着对供给约束的严格程度要求越高,供给数量将会相应增加,但变化范围不会太大,所以分配成本也不会大幅度变化,这与实际情况相符。

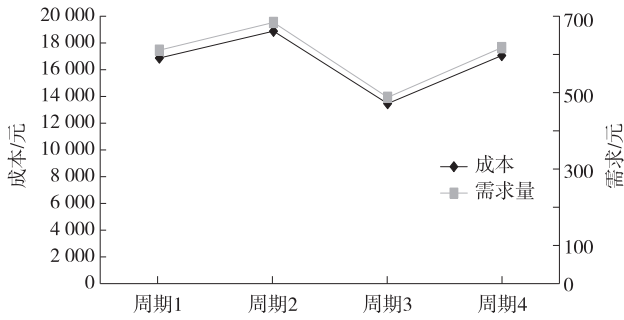


图 2 各分配周期内物流能力需求与分配成本的关系

Fig. 2 Relationship between logistics capacity demand and distribution cost in each distribution cycle

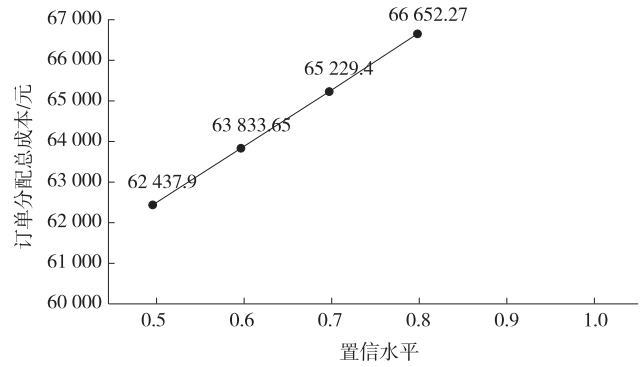


图 3 置信水平 $\xi=\lambda$ 与分配总成本关系图

Fig. 3 Confidence level $\xi=\lambda$ and total cost of distribution

5 结论

在实际物流服务供应链订单分配中,往往会受到不确定性因素的影响,考虑参数变量的模糊不确定性,在模糊环境下对订单进行分配优化,有利于提升方案的有效性和可行性。考虑到供给量和需求量的模糊性,本文建立了 0-1 混合整数模糊动态非线性多目标分配模型,优化目标是最小化物流服务集成商订单分配成本。通过可信性理论将模糊型模型转化为确定型模型,利用 Lingo 软件进行求解,并对求解结果及置信水平灵敏性进行了分析,算例分析验证了所建模型的可行性。未来研究方向可以考虑物流服务集成商与物流服务供应商的合作模式,将物流服务供应商分为合约型与市场型两种,对订单分配进行优化。

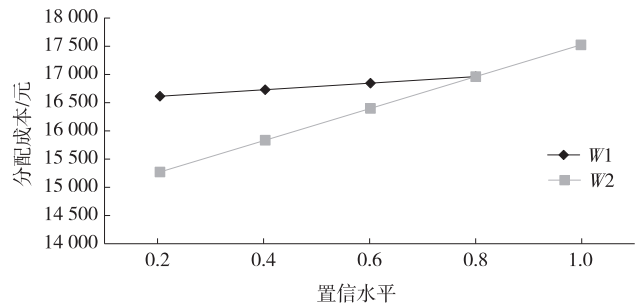


图 4 第 1 周期内置信水平与分配成本的关系

Fig. 4 The relationship between the built-in letter level and the distribution cost in the first cycle

参考文献:

[1] 蹇洁,张昱瑶,陈华,等.基于多周期合作的物流服务供应链质量协调研究[J]. 数学的实践与认识,2018,48(5):44-51.
 QI J,ZHANG Y Y,CHEN H,et al. Study on quality coordination of logistics service supply chain based on multi-cycle cooperation[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2018,48(5):44-51.

[2] 张丹凤.基于努力水平的物流服务供应链质量监督与协调研究[J]. 现代商贸工业,2018,39(32):60-61.
 ZHANG D F. Study on quality supervision and coordination of logistics service supply chain based on effort level[J]. Modern Business & Trade,2018,39(32):60-61.

[3] 刘艳秋,蔡超.考虑双边可靠性的物流服务供应链协调契约研究[J]. 工业工程与管理,2018,23(2):59-67.
 LIU Y Q,CAI C. Research on LSSC coordination contract considering bilateral reliability[J]. Industrial Engineering and Management,2018,23(2):59-67.

[4] 卢安文,杨东华.关于物流服务供应链契约协调研究[J]. 铁道运输与经济,2018,40(6):42-47.
 LU A W,YANG D H. Research on contract coordination of logistics service supply chain[J]. Railway Transport & Economy,2018,40(6):42-47.

[5] 秦娟,陈振颂,李延来.考虑专家风险偏好的物流服务供应商选择研究[J]. 工业工程与管理,2016,21(2):41-48.
 QIN J,CHEN Z S,LI Y L. Study on the selection of logistics service providers considering expert risk preference [J]. Industrial Engineering and Management,2016,21(2):41-48.

[6] Yang Y L. The selection of logistics service provider based on rough set and unascertained measure model[C/OL]// International Conference on Service Systems & Service Management, Dalian, China; IEEE,2017. [2019-09-25]. <https://ieeexplore.ieee.org/document/7996144>.

[7] 张广胜,刘伟.考虑服务时效的物流服务供应链应急任务分配[J]. 计算机应用,2016,36(8):2335-2339.
 ZHANG G S,LIU W. Emergency task assignment of logistics service supply chain considering service timeliness[J]. Computer Applications,2016,36(8):2335-2339.

[8] LIU W,WANG S,ZHU D L,et al. Order allocation of logistics service supply chain with fairness concern and demand updating: model analysis and empirical examination [J]. Annals of Operations Research,2018,268(1/2):177-

- 213.
- [9] 谢乃明,吴乔,郑绍祥. 面向云平台中心化集成调度的跨供应商订单分配模型[EB/OL]. [2019-09-25]. <https://doi.org/10.13195/jkzyjc.2018.0545>.
- XIE N M, WU Q, ZHENG S X. Cross-vendor order allocation model for cloud platform centralized integration scheduling[EB/OL]. [2019-09-25]. <https://doi.org/10.13195/jkzyjc.2018.0545>.
- [10] 吴晓研,路世昌,刘忠敏. 物流能力随机条件下的 LSSC 任务分配模型及算法[J]. 物流技术, 2015, 34(19): 91-93.
- WU X Y, LU S C, LIU Z M. The LSSC task allocation model and algorithm under stochastic conditions of logistics capability[J]. Logistics Technology, 2015, 34(19): 91-93.
- [11] 周晓阳,涂燕,韩菁. 不确定条件下环境友好型资源分配二层规划模型[J]. 运筹与管理, 2018, 27(5): 15-21.
- ZHOU X Y, TU Y, HAN J. A two-tier planning model for environmentally friendly resource allocation under uncertain conditions[J]. Operations Research and Management, 2018, 27(5): 15-21.
- [12] 张广胜,刘伟. 考虑价格风险的物流服务供应链能力组合采购决策[EB/OL]. [2019-09-25]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5946.TP.20180809.1543.036.html>.
- ZHANG G S, LIU W. Logistics service supply chain capability combination purchasing decision considering price risk[EB/OL]. [2019-09-25]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5946.TP.20180809.1543.036.html>.
- [13] PARTHIBAN P, PUNNIAMOORTHY M, GANESH K, et al. A hybrid model for sourcing selection with order quantity allocation with multiple objectives under fuzzy environment[J]. International Journal of Applied Decision Sciences, 2009, 2(3): 275.
- [14] 曲孟,朱斌,惠记庄,等. 基于可信性理论的闭环供应链生产计划[J]. 工业工程与管理, 2018, 23(4): 36-44.
- QU M, ZHU B, HUI J Z, et al. The production plan of closed-loop supply chain based on credibility theory[J]. Industrial Engineering and Management, 2018, 23(4): 36-44.
- [15] GONG Y, PENG Y, HUANG D, et al. A fuzzy chance constraint programming approach for location-allocation problem under uncertainty in a closed-loop supply chain [C/OL]//International Joint Conference on Computational Sciences & Optimization, Sanya, China: IEEE, 2009 [2019-09-25]. <https://ieeexplore.ieee.org/document/5194074>.
- [16] 王心. 流程工业实施绿色生产的模糊规划[M]. 北京: 中国财富出版社, 2014: 191-194.
- WANG X. Fuzzy planning for green production in process industry[M]. Beijing: China Fortune Press, 2014: 191-194.

Operations Research and Cybernetics

Research on Order Distribution of Logistics Service Supply Chain under Fuzzy Environment

HU Yanyong, FAN Zhiqiang

(School of Business Administration Energy Economics Research Center,
Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454000, China)

Abstract: [Purposes] In view of the order allocation problem of logistics service supply chain, considering the dynamic and ambiguity of the order allocation problem, the model is designed to be more in line with the actual situation and improve the feasibility of the scheme. [Methods] The logistics service provider logistics capacity supply and logistics service integrator logistics capacity demand quantity were set as fuzzy uncertain variables, and the order allocation model under fuzzy environment was established to minimize the logistics service integrator order allocation cost as the optimization goal. The feasibility theory is used to carry out the clear equivalent conversion, and finally the simulation operation is performed by the LINGO11.0 software. [Findings] Through the confidence level sensitivity analysis, the relationship between the confidence level and the order allocation cost is obtained, which can provide certain decision support for logistics service integrators. [Conclusions] When the logistics service integrators formulate the order allocation plan, the confidence level should be set above 0.5, so that the allocation plan does not deviate too much from the actual situation and increase the feasibility of the plan. Also pay attention to the relationship between the level of confidence and cost, and choose the level of confidence that suits your needs.

Keywords: fuzzy environment; logistics service supply chain; order allocation; credibility theory

(责任编辑 许 甲)

碳税政策下基于回收质量不确定的闭环供应链定价策略*

张铃铃, 陈淮莉

(上海海事大学 物流科学与工程研究院, 上海 201306)

摘要:【目的】通过深入研究回收再制造中回收质量不确定的问题,并结合碳税政策讨论两级闭环供应链的定价决策问题,从而探讨企业如何在此环境背景下获得最大的经济效益。【方法】运用博弈论的方法求出了产品的最优批发价格、最优零售价格,并进一步求得供应链成员的最大利润,讨论了碳税税率和再制造质量门槛对制造商和零售商的产品定价以及市场需求量等的影响,随后利用两部定价契约对闭环供应链进行协调。【结果】通过算例分析验证了模型的正确性,结果表明:当碳税税率高时,企业可适当提高废旧产品的再制造质量门槛;当碳税税率低时,企业应考虑降低再制造质量门槛,以此来兼顾企业的经济效益和环境效益。【结论】政府部门通过对碳税税率的调节与碳税的征收,激励制造商从事再制造产品生产,从而促使各企业在协调机制下展开合作。

关键词:碳税;回收质量不确定;闭环供应链;定价策略;博弈论

中图分类号:O225;F274

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)05-0042-10

当前,人类正面临一系列全球变化带来的问题,其中较为严重的问题是二氧化碳排放造成的气候变暖。世界上许多国家都在积极采取措施,以便尽可能地减少碳排放量,其中碳税^[1]是国际上为减少温室气体排放采取的一项重要政策。截至2012年,欧洲已有15个国家实施了碳税政策,美国部分城市以及加拿大等国家相继开征碳税。中国也提出将在2020年实现单位GDP二氧化碳排放强度应相对于2005年降低40%的减排目标。在政府采取一系列政策的同时,回收再制造^[2]必然是企业生产方式的转变方向。随着理论和实践的不断发展与进步,回收再制造是可以解决碳排放量和绿色生产要求的。那么,闭环供应链的成员需要转变它的生产经营模式,这亦将影响新旧产品的定价与回收。同样,闭环成员如何作出更加合理的定价以及如何制定回收策略是值得研究的课题。

至今为止,国内外学者对闭环供应链定价决策问题做了大量研究。Gaur等人^[3]指出闭环供应链是通过产品再造来扩大价值的一项举措,阐述了闭环供应链的定义和特征,强调其特征为生产、消费、再生产。而Savaskan等人^[4]基于前人的研究,讨论了不同模式下闭环供应链的最大收益。孙浩等人^[5]探讨了集中式决策和3种分散式回收模式下的闭环供应链定价策略。Rabindranath和Alamdard等人^[6-9]分别研究了关于闭环供应链多阶段再制造以及多级闭环供应链中的回收与定价策略。王玉燕等人^[10]分析了政府回收政策下电子产品闭环供应链的结构重组,并对该闭环供应链运行模式的修正进行了研究。颜荣芳等人^[11]讨论了关于再制造闭环供应链的差别定价策略。

在如今倡导低碳与绿色生产的背景下,已有学者开始考虑低碳环境下闭环供应链的生产决策与定价策略问题,并围绕碳限额、碳交易、碳税政策以及碳减排技术进行研究。Drake等人^[12]分别研究了碳限额与交易和碳税政策对两阶段企业的技术选择和产能决策的影响,结果表明碳交易政策下具有更高的期望利润。Mohammed等人^[13]提出考虑碳足迹的多周期闭环供应链的设计模型,该模型捕获了供应链总成本和碳排放之间存在的权衡。Tao等人^[14]研究了制造过程中的两种碳排放约束,建立了闭环供应链均衡模型并验证了该模型的有效性。李浩霖等人^[15]运用博弈论方法分析了公平关切对供应链定价和碳减排决策的影响。然而上述研究没有涉及回收再制造以及回收产品质量的问题。事实上,企业若同时生产新产品和再制造产品,再制造产品生产碳排放量常常

* 收稿日期:2018-12-28 修回日期:2019-09-09 网络出版时间:2019-09-26 11:24

资助项目:国家社会科学基金(No. 15BGL084);上海市科学技术委员会科研计划(No. 14DZ2280200)

第一作者简介:张铃铃,女,研究方向为采购与供应链管理、定价策略,Email:963816957@qq.com;通信作者:陈淮莉,女,教授,博士,Email:hlchen@shmtu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190926.1124.032.html>

低于新产品,因此这种绿色生产模式是值得倡导的。同时,政府部门通过征收碳税,会对企业新产品和再制造产品的定价决策产生影响,因此考虑闭环供应链再制造生产下的减排及定价策略问题更具有实际意义。王道平等^[16]考虑了政府对制造商碳排放情况进行奖惩,以此为背景研究了对新产品和再制品进行差别定价下的闭环供应链协调问题。舒彤等人^[17]和马中华等人^[18]基于政府部门对再制造产品制造商和消费者的差别权重补贴及自执行旁支付的利润契约机制,运用博弈论建立考虑消费者绿色偏好的闭环供应链定价模型。

上述文献虽研究了碳税政策下考虑回收再制造的企业定价决策问题,但大多假定废旧产品回收质量确定,且再制造过程中产品产生的二氧化碳质量与制造新产品相同,这与现实情景不符。部分学者针对回收质量不确定对制造企业的生产和定价决策的影响进行了探讨^[19-20],而鲜有文献详细讨论碳税税率与再制造质量门槛的变化对闭环供应链的影响。

基于上述研究背景,本文考虑碳税政策对闭环供应链定价决策问题进行研究,将回收质量不确定这一指标进行量化,分别构建相应的闭环供应链集中和分散决策模型,并通过设计两部定价契约对闭环供应链的利润进行协调。最后,结合算例和灵敏度分析验证模型的有效性,以期为企业在“绿色”背景下获取最佳效益提供理论指导和实践参考。

1 模型描述与研究假设

在本文闭环供应链系统中,制造商不仅生产新产品,还会对从零售商手中收回的废旧产品进行再加工,零售商主要是负责从消费者手中回收废旧产品并在之后继续销售新产品与再制造产品。此外,政府部门会对制造商生产过程中产生的二氧化碳进行征税。

针对闭环供应链系统,将复杂的现实情况进行简化并做出如下假设:

1) 回收产品的质量参差不齐,并且制造商拿到的回收产品 $q \in [0, q_0)$ 都是从零售商手中获得的。假设回收质量 q 是在 $[0, 1]$ 上的均匀分布, $f(q)$ 为质量密度函数^[21]。此外,假设 q_0 为再制造质量门槛,这表示如果废旧产品的质量 q 在 q_0 至 1 之间则可以再制造,如果其质量在 0 至 q_0 之间则将进行废弃处理,且处理成本为固定成本 C_1 。

2) 制造商回购废旧产品的价格 F 与回收质量 q 呈线性关系,表达式为 $F = \theta q$, θ 代表质量价值系数。零售商从消费者手中回收到的废旧产品的价格 f 与 F 有关,表达式为 $f = (1-r)F = (1-r)\theta q$, 其中 $r \in (0, 1)$ 表示零售商对废旧产品进行回收操作时获得的单位利润率。

3) 废旧产品回收数量与回收价格 f 呈线性关系,即 $G = h + kf$ 。其中, h 表示消费者无偿提供废旧产品的数量,而 k 表示回收价格敏感系数。此时,可进行再制造的废旧产品数量为 $G_0 = G \int_{q_0}^1 f(q) dq$ 。

4) 产品的市场需求量是销售价格 p 的线性减函数,即 $D = a - bp (D > G)$ 。其中, a 为市场潜在需求量, b 为销售价格敏感系数。另外,制造商生产的再制造产品和新产品的数量分别为 $D_r = G_0$ 和 $D_n = D - G_0$, 并将两种产品以价格 ω 全部批发给零售商。

5) 新产品的生产成本为 C_n , 再制造产品的生产成本为 C_r 。另假设再制造产品的生产成本与废旧产品回收质量呈线性关系,即 $C_r = C_n - \vartheta q$, 其中 ϑ 为质量成本系数。

6) 制造商生产单位新产品和再制造产品的二氧化碳排放量分别为 e_n 和 e_r 。假设单位再制造产品生产过程中的二氧化碳排放量是废旧产品回收质量的线性减函数,即 $e_r = (1-q)e_n$ 。政府部门对制造商生产过程中产生的二氧化碳进行征税,税率为每吨二氧化碳 λ 元。则对单位新产品和再制造产品征收的碳税分别为 λe_n 和 $\lambda e_r = \lambda(1-q)e_n$ 。

2 闭环供应链分散和集中定价模型构建

从模型描述与研究假设出发,本文分别构建碳税政策下考虑回收质量不确定的闭环供应链分散和集中定价模型,并对两种定价模型进行比较分析,旨在探索碳税政策和废旧产品回收质量对闭环供应链产品定价和成员利润的影响。

2.1 闭环供应链分散定价模型构建与分析

在建立闭环供应链分散定价模型时,考虑回收质量不确定并运用 Stackelberg 博弈方法,将制造商视为博弈

的领导者,零售商为跟随者,假设市场信息完全对称,决策者的风险偏好为中性。供应链中的成员均只基于自身利益最大化的出发点进行决策。制造商和零售商分散决策的最优利润分别表示为:

$$\max \pi_m = \omega D - (C_n(D - G_0) + C_r G_0) - FG - C_1 - (\lambda(D - G_0)e_n + \lambda G_0 e_r), \quad (1)$$

$$\max \pi_r = pD + FG - \omega D - fG. \quad (2)$$

其中:(1)式的最优利润是关于 ω 和 θ 的严格联合凹函数,(2)式的最优利润是关于 p 和 r 的严格联合凹函数,因此模型存在唯一最优解。采用逆向归纳法得到分散决策时产品的最优定价为:

$$\begin{cases} \omega^* = \frac{a + b(C_n + \lambda e_n)}{2b}, \\ F^* = \frac{(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{4} - \frac{h}{2k}, \\ p^* = \frac{3a + b(C_n + \lambda e_n)}{4b}, \\ f^* = \frac{(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{8} - \frac{3h}{4k}. \end{cases} \quad (3)$$

由方程组(3)和假设 4)可得分散决策下新产品和再制造产品的最优需求量分别为:

$$\begin{cases} D_n^* = \frac{2(a - b(C_n + \lambda e_n)) - (1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{8}, \\ D_r^* = \frac{(1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{8}. \end{cases} \quad (4)$$

由方程组(4)和假设 6)可得分散决策均衡解下制造商碳排放总量为:

$$E^* = \frac{4(a - b(C_n + \lambda e_n)) - (1 - q_0^2)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{16} e_n. \quad (5)$$

由方程组(3)和(1),(2)式分别可得分散决策下制造商、零售商和闭环供应链最优利润为:

$$\begin{cases} \pi_m^* = \frac{(a - b(C_n + \lambda e_n))^2}{8b} + \frac{(k(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{32k} - C_1, \\ \pi_r^* = \frac{(a - b(C_n + \lambda e_n))^2}{16b} + \frac{(k(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{64k}, \\ \pi^* = \pi_m^* + \pi_r^* = \frac{3(a - b(C_n + \lambda e_n))^2}{16b} + \frac{3(k(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{64k} - C_1. \end{cases} \quad (6)$$

对上述最优结果进行分析,可得到结论 1~3。

结论 1 制造商提供的批发价格和零售商提供的销售价格随碳税税率 λ 的增加而提高,与再制造质量门槛 q_0 无关;废旧产品的最优回收价格和回购价格随碳税税率 λ 的增加而提高,随再制造质量门槛 q_0 的增加而降低。

证明 对方程组(3)中的 ω^* , F^* , p^* , f^* 分别求他们关于 λ 和 q_0 的一阶导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^*}{\partial \lambda} = \frac{e_n}{2} > 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial \lambda} = \frac{e_n}{4} > 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial \lambda} = \frac{(1 - q_0^2)e_n}{4} > 0, \quad \frac{\partial f^*}{\partial \lambda} = \frac{(1 - q_0^2)e_n}{8} > 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial q_0} = -\frac{q_0(\vartheta + \lambda e_n)}{2} < 0, \quad \frac{\partial f^*}{\partial q_0} = -\frac{q_0(\vartheta + \lambda e_n)}{4} < 0. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

结论 2 新产品的需求量随碳税税率 λ 的增加而下降,随再制造质量门槛 q_0 提高而上升;再制造产品的需求量与新产品需求量情况相反。

证明 对方程组(4)中的 D_n^* 分别求关于 λ 和 q_0 的一阶导数得:

$$\frac{\partial D_n^*}{\partial \lambda} = -\frac{e_n(2b + k(1 - q_0 - q_0^2 - q_0^3))}{8} < 0, \quad \frac{\partial D_n^*}{\partial q_0} = \frac{2h + k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0)(1 + 3q_0)}{8} > 0,$$

即 D_n^* 随着 λ 增大而减小,随着 q_0 增大而增大;同理, D_r^* 随着 λ 增大而增大,随着 q_0 增大而减小。证毕

结论 3 制造商的碳排放总量随碳税税率 λ 的增加而下降,随再制造质量门槛 q_0 的增加而上升。

证明 对(5)式中的 E^* 分别求关于 λ 和 q_0 的一阶导数得:

$$\frac{DE^*}{D\lambda} = -\frac{e_n^2(4b + k(1 - 2q_0^2 + q_0^4))}{16} < 0, \quad \frac{DE^*}{Dq_0} = \frac{e_n q_0 (h + k(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n))}{4} > 0,$$

即 E^* 随着 λ 增大而减小,随着 q_0 增大而增大。证毕

分析结论 1~3 可知:1) 制造商为了降低碳税带来的利润损失,将提高产品的批发价格,零售商随之提高销售价格,由此达到将碳税成本转嫁给消费者的目的。2) 除此以外,在碳税政策下制造商会考虑扩大再制造产品产量,并提高废旧产品回购价格,同时零售商亦将提高废旧产品回收价格,这将导致目标市场上新产品需求量的下降,再制造产品需求量的上升,最终达到减少碳排放总量的效果。3) 再制造质量门槛提高时,制造商的再制造产品质量会因此提高,但制造商给出的回收废旧产品价格必然升高,实际上制造商进行再制造的利润反而因此降低。4) 在再制造质量门槛提高的前提下,制造商和零售商将尽可能降低废旧产品回购与回收价格,进而回收数量将下降。在市场需求维持稳定的情况下,由于可再制造的废旧产品数量减少,制造商将生产更多的新产品,这必会导致碳排放总量的上升。

2.2 集中决策模型构建与分析

考虑碳税政策下回收质量不确定的闭环供应链的集中决策模型,即供应链成员共同决策相关变量以求得整个闭环供应链的利润最大化,一同决定定价策略。供应链的总体利润为销售产品所得的收益与制造成本、回收成本、废旧产品处理成本以及碳排放成本的差,则集中决策下闭环供应链的最优利润表示为:

$$\begin{aligned} \max \pi = & pD - C_n(D - G_0) - C_r G_0 - \lambda e_n G_0 - \lambda e_n(D - G_0) - fG - C_1 = \\ & (p - C_n - \lambda e_n)D + (C_n - C_r + \lambda(e_n - e_r))G_0 - fG - C_1. \end{aligned} \quad (7)$$

与分散决策模型求解方法相同,采用逆向归纳法得到分散决策时产品的最优定价,可得集中决策时最优定价:

$$\begin{cases} p^{**} = \frac{a + b(C_n + \lambda e_n)}{2b}, \\ f^{**} = \frac{(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{4} - \frac{h}{2k}. \end{cases} \quad (8)$$

由方程组(8)和假设 4) 可得集中决策下新产品和再制造产品的最优需求量分别为:

$$\begin{cases} D_n^{**} = \frac{2(a - b(C_n + \lambda e_n)) - (1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{4}, \\ D_r^{**} = \frac{(1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{4}. \end{cases} \quad (9)$$

由方程组(8)和假设 6) 可得集中决策均衡解下制造商碳排放总量为:

$$E^{**} = \frac{4(a - b(C_n + \lambda e_n)) - (1 - q_0^2)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{8} e_n. \quad (10)$$

由方程组(8)和(7)式可得集中决策下闭环供应链最优利润为:

$$\pi^{**} = \frac{(a - b(C_n + \lambda e_n))^2}{4b} + \frac{(k(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{16k} - C_1. \quad (11)$$

通过对集中和分散定价决策方式进行比较分析,可以得到结论 4。

结论 4 集中决策的新产品以及再制造产品的销售价格相较于分散决策的销售价格要低;废旧产品的回收价格相较于分散决策时的回收价格要高;新产品和再制造产品的需求量高于分散决策时的需求量;碳排放量比分散决策时低。

证明 将集中决策和分散决策模型中求得的最优销售价格、回收价格与新产品和再制造产品的结果分别作差,有:

$$\begin{aligned} p^{**} - p^* &= \frac{a + b(C_n + \lambda e_n)}{2b} - \frac{3a + b(C_n + \lambda e_n)}{4b} = \frac{b(C_n + \lambda e_n) - a}{4b} < 0, \\ f^{**} - f^* &= \frac{(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{4} - \frac{h}{2k} - \left[\frac{(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{8} - \frac{3h}{4k} \right] = \frac{k(1 - q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h}{8k} > 0, \\ D_n^{**} - D_n^* &= \frac{2(a - b(C_n + \lambda e_n)) - (1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{4} - \\ & \quad \frac{2(a - b(C_n + \lambda e_n)) - (1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{8} = D_n^* > 0, \\ D_r^{**} - D_r^* &= \frac{(1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{4} - \frac{(1 - q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1 - q_0^2) + 2h)}{8} = D_r^* > 0. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

结论 5 在集中决策时,闭环供应链的总利润高于分散决策时的总利润。

证明

$$\pi^{**} - \pi^* = \frac{(a-b(C_n + \lambda e_n))^2}{4b} + \frac{(k(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{16k} - C_1 -$$

$$\left[\frac{3(a-b(C_n + \lambda e_n))^2}{16b} + \frac{3(k(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{64k} - C_1 \right] =$$

$$\frac{(a-b(C_n + \lambda e_n))^2}{16b} + \frac{(k(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{64k} > 0. \quad \text{证毕}$$

分析结论 4 和 5 可知:1) 当制造商和零售商采取集中决策时,制造商给出的回收价格提高,看似无利可寻,但是产品质量却随之提高、回收数量随之增加,这导致再制造产品数量增多且质量有所保障,这将提升闭环供应链的整体利润;2) 产品的销售价格会下降,这在某种程度上增加了市场需求量,为供应链成员获得更大的收益。事实上,此时消费者的利益也达到最大化,即在碳税政策下回收质量不确定的集中决策会使得制造商、零售商以及消费者的利益均达到最大。

3 闭环供应链契约协调机制设计

基于上述讨论可以看出,在碳税政策下回收质量不确定的闭环供应链中,进行分散决策的供应链利润比采取集中决策的供应链利润要低。则此时,有必要引入两部定价契约对碳税政策下回收质量不确定的闭环供应链进行协调。两部定价契约的形式可表示为 (ω^c, F^c, H) ,其中 ω^c 是制造商提供给零售商的批发价格, F^c 是制造商提供给零售商废旧产品的回购价格, H 是制造商向零售商收取的固定费用。由此,两部定价契约下制造商和零售商的利润分别为:

$$\pi_m = \omega^c D - (C_n(D - G_0) + C_r G_0) - F^c G - C_1 - (\lambda(D - G_0)e_n + \lambda G_0 e_r) + H, \quad (12)$$

$$\pi_r = pD + F^c G - \omega^c D - fG - H. \quad (13)$$

对(13)式求解关于 p 和 f 的一阶导数可得:

$$\begin{cases} p^c = \frac{a + b\omega^c}{2b}, \\ f^c = \frac{F^c}{2} - \frac{h}{2k}. \end{cases} \quad (14)$$

为了使协调机制中闭环供应链的利润能够达到集中决策时闭环供应链的利润水平,需要满足两部定价契约中的销售价格与集中决策中的新产品和再制造产品销售价格相等,即 $p^c = p^{**}$,两部定价契约中的回收价格与集中决策中的废旧产品回收价格相等,即 $f^c = f^{**}$ 。由此可得两部定价契约中新产品和再制造产品最优批发价格 ω^c 和废旧产品最优回购价格 F^c :

$$\begin{cases} \omega^c = C_n + \lambda e_n, \\ F^c = \frac{(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{2}. \end{cases} \quad (15)$$

此时,制造商和零售商的利润分别为:

$$\begin{cases} \pi_m^c = \frac{h(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{4} + \frac{k((1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n))^2}{8} + H - C_1, \\ \pi_r^c = \frac{(a-b(C_n + \lambda e_n))^2}{4b} + \frac{(k(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{16k} - H. \end{cases} \quad (16)$$

要证明使用两部定价契约时,供应链成员的利润不低于分散决策下的利润,则必须满足 $\pi_m^c \geq \pi_m^*$,由此可得到固定支付 H 满足:

$$\begin{cases} H \geq \frac{(a-b(C_n + \lambda e_n))^2}{8b} - \frac{3k((1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n))^2}{32} - \frac{h(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{8} + \frac{h^2}{16k} - C_1, \\ H \leq \frac{3(a-b(C_n + \lambda e_n))^2}{16b} + \frac{3(k(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{64}. \end{cases} \quad (17)$$

基于上述讨论,在碳税政策下,当两部定价契约 (ω^c, F^c, H) 满足(15),(17)式时,即可促成碳税政策下回收质量不确定的闭环供应链集中决策方式的实施,并且实现闭环供应链的协调。

4 算例分析

为了说明上述结论的有效性,现结合实际运作情况和研究经验对本文模型进行验证,并通过算例分析和参数的灵敏度分析,为碳税政策的制定和企业定价决策提供理论依据。在碳税政策下考虑回收质量不确定的闭环供应链中:碳税税率 $\lambda=15$,再制造质量门槛 $q_0=0.3$,单位新产品生产碳排放量 $e_n=2$,市场固定的需求量 $a=1\ 000$,消费者无偿提供的废旧品数量 $h=40$,回收价格敏感系数 $k=2.5$,销售价格敏感系数 $b=2.5$,再制造质量成本系数 $\vartheta=160$,新产品制造成本 $C_n=200$,不可再制造废旧产品固定废弃处理成本为 $C_1=200$ 。

4.1 不同定价决策方式最优结果比较

综合上述结果可以得到最终各情况下的决策变量最优解。表 1 清晰地表示出两种定价策略模型各自的最优情况。

表 1 不同定价决策方式的最优解

Tab.1 Optimal results of the different decision-making methods

变量	分散决策	集中决策
p	$\frac{3a+b(C_n+\lambda e_n)}{4b}$	$\frac{a+b(C_n+\lambda e_n)}{2b}$
f	$\frac{(1-q_0^2)(\vartheta+\lambda e_n)}{8}-\frac{3h}{4k}$	$\frac{(1-q_0^2)(\vartheta+\lambda e_n)}{4}-\frac{h}{2k}$
ω	$\frac{a+b(C_n+\lambda e_n)}{2b}$	—
F	$\frac{(1-q_0^2)(\vartheta+\lambda e_n)}{4}-\frac{h}{2k}$	—
D_n	$\frac{2(a-b(C_n+\lambda e_n))-(1-q_0)(k(\vartheta+\lambda e_n)(1-q_0^2)+2h)}{8}$	$\frac{2(a-b(C_n+\lambda e_n))-(1-q_0)(k(\vartheta+\lambda e_n)(1-q_0^2)+2h)}{4}$
D_r	$\frac{(1-q_0)(k(\vartheta+\lambda e_n)(1-q_0^2)+2h)}{8}$	$\frac{(1-q_0)(k(\vartheta+\lambda e_n)(1-q_0^2)+2h)}{4}$
π	$\frac{3(a-b(C_n+\lambda e_n))^2}{16b}+\frac{3(k(1-q_0^2)(\vartheta+\lambda e_n)+2h)^2}{64k}-C_1$	$\frac{(a-b(C_n+\lambda e_n))^2}{4b}+\frac{(k(1-q_0^2)(\vartheta+\lambda e_n)+2h)^2}{16k}-C_1$

进一步根据模型及参数设定,对碳税政策下考虑回收质量不确定的闭环供应链分散决策、集中决策和协调机制的最优结果比较如表 2 所示。

由表 2 及模型部分所得结论可以看出:1)集中决策时,新产品和再制造产品销售价格相较于分散决策时的销售价格要低;而废旧产品回购价格和回收价格相较于分散决策时的价格要高;2)产品的需求量以及闭环供应链的整体利润在进行集中决策和协调机制下要更高;3)闭环供应链协调机制中的销售价格、废旧产品回收价格和闭环供应链整体利润与集中决策时的结果相同,表明设计的协调机制能够达到集中决策时的效果,从而使闭环供应链利润最优。

4.2 灵敏度分析

为了探讨本文中两个重要参数碳税税率 λ 和再制造质量门槛 q_0 对企业决策的影响,利用 Matlab 进行仿真及分析,并以函数图像进行直观表述。以下将对两个参数进行详细地分析。

表 2 不同决策方式的最优结果比较

Tab.2 Comparison of the different decision-making methods' optimal results

变量	分散决策	集中决策	两部定价契约	结果比较
p	357.5	315	315	$p^c = p^{**} < p^*$
f	9.61	35.23	35.23	$f^c = f^{**} > f^*$
ω	315	—	230	$\omega^* > \omega^c$
F	35.23	—	86.45	$F^* < F^c$
D_n	61.43	122.86	122.86	$D_n^c = D_n^{**} > D_n^*$
D_r	44.82	89.64	89.64	$D_r^c = D_r^{**} > D_r^*$
π	18 269.2	24 425.7	24 425.7	$\pi^c = \pi^{**} > \pi^*$

4.2.1 碳税税率灵敏度分析 在对碳税税率 λ 进行灵敏度分析时,设定碳税税率的变化范围为 $\lambda \in (0, 30)$,其他参数固定不变,并得到图 1。

1) 3 种模式中,新产品和再制造产品批发价格、废旧产品回购价格均随碳税税率增加而增加。而在集中决策和分散决策中,新产品和再制造产品的销售价格随碳税税率的增加而增加,新产品需求量随碳税税率增加而下降,再制造产品需求量反之。闭环供应链的利润随碳税税率增加而减少,制造商碳排放量随碳税税率增加而下降。

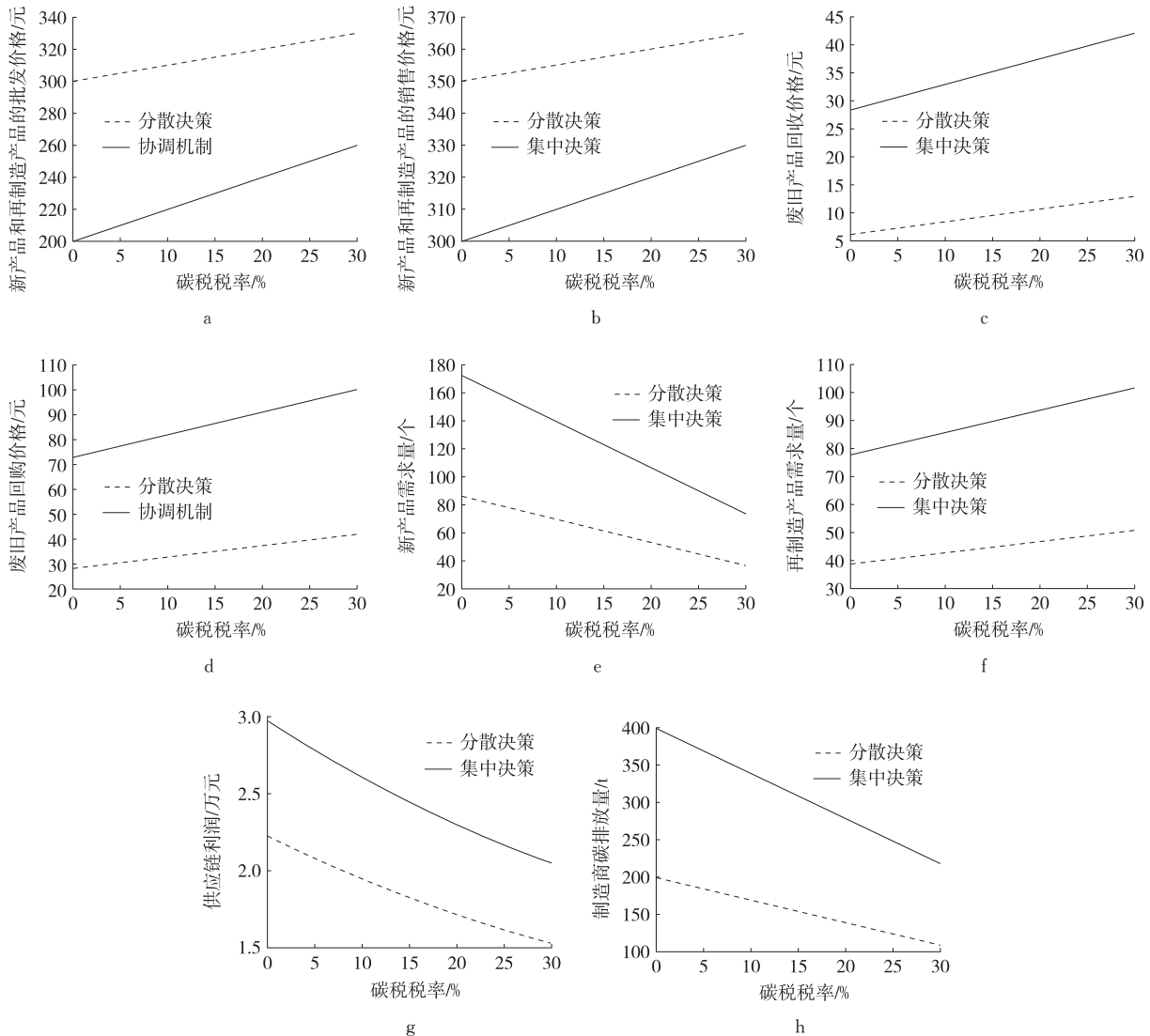


图 1 碳税税率 λ 对不同决策方式下相关变量的影响

Fig. 1 Effect of carbon tax rate on related variables under different decision-making methods

2) 分散决策使得闭环供应链的效益降低,而集中决策能够使新产品和再制造产品的销售价格降低、废旧产品的回收价格提高,新产品和再制造产品的市场需求量和废旧产品的回收数量将会随之增加,闭环供应链的最优利润相较于分散决策的利润要高。

3) 在碳税政策下,一方面制造商为了减少碳排放量将增加再制造产品的产量,尽量减少制造新产品;另一方面,若制造商提高了废旧产品的回收价格,那么将影响的是回收质量和回收的数量——质量提升、数量增加,进而再制造产品数量增多,从总体上降低了碳排放量。

4.2.2 再制造质量门槛灵敏度分析 在对再制造质量门槛 q_0 进行灵敏度分析时,首先应考虑的是 q_0 的取值范围,由假设可知 q_0 可取 0 至 1 中的任意数,但实际上,若 q_0 趋于 0,说明设定再制造质量门槛这一指标没有设置的必要,即制造商将再制造所有回购的废旧产品;若 q_0 接近于 1,则说明再制造的质量标准过于严格,即大部分乃至所有废旧产品无法进行再制造。

本文中,在其他参数固定不变的前提下,考虑 q_0 取值时可以从闭环供应链的基本利益考虑,最基本的条件应满足废旧产品回收和回购价格、新产品和再制造产品需求量以及供应链的总体利润大于 0。结合上文结论 4,即以下各式应成立:

$$f^* = \frac{(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{8} - \frac{3h}{4k} > 0, F^* = \frac{(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n)}{4} - \frac{h}{2k} > 0,$$

$$D_n^* = \frac{2(a-b(C_n + \lambda e_n)) - (1-q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1-q_0^2) + 2h)}{8} > 0,$$

$$D_r^* = \frac{(1-q_0)(k(\vartheta + \lambda e_n)(1-q_0^2) + 2h)}{8} > 0,$$

$$\pi^* = \frac{3(a-b(C_n + \lambda e_n))^2}{16b} + \frac{3(k(1-q_0^2)(\vartheta + \lambda e_n) + 2h)^2}{64k} - C_1 > 0.$$

将上文设定的参数带入其中,又因为 $q_0 \in (0, 1)$,最终求得 q_0 的取值范围为 $(0, 0.703)$ 。在本章节中选取再制造质量门槛 $q_0 \in (0, 0.7)$,利用 Matlab 仿真分析可以得到图 2。

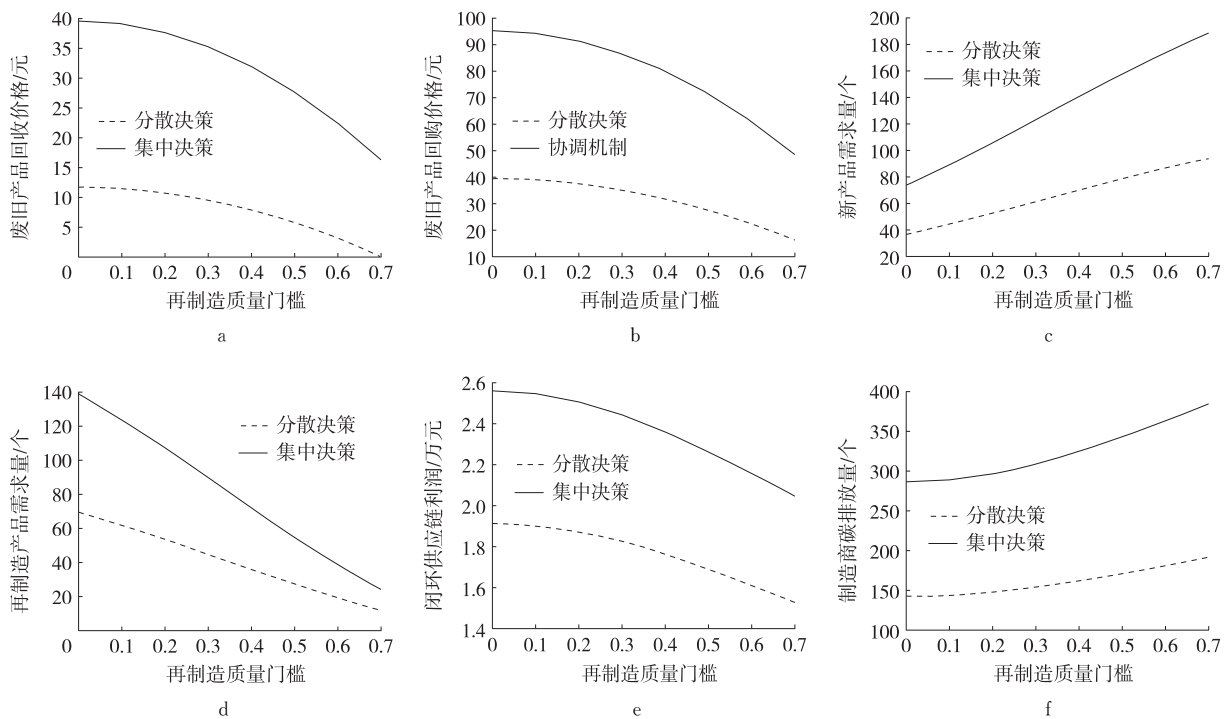


图 2 再制造质量门槛 q_0 对不同决策方式下相关变量的影响

Fig. 2 Effect of remanufacturing quality threshold on related variables under different decision-making methods

1) 当供应链进行集中决策和分散决策时,若再制造质量门槛提高,废旧产品的回收价格会随之降低,并且闭环供应链的整体利润也将降低。最终导致新产品的需求量增加,而再制造产品的需求量减少,此时制造商碳排放量将增加。

2) 供应链运用协调机制时,若再制造质量门槛提高,反而压制了废旧产品的回收价格。供应链在进行分散决策时有同样的情况,并且协调机制下的废旧产品回购价格大于分散决策的结果。

3) 再制造质量门槛的提高,导致制造商进行再制造的利润降低,此时制造商会选择降低废旧产品回购价格,零售商废旧产品回收价格亦将降低。同时,可再制造的废旧产品数量减少,制造商将生产更多的新产品,这将导致目标市场上新产品需求量增加,再制造产品需求量降低,致使碳排放总量上升。

4) 在企业的生产运营中,需求不仅仅只是废旧产品回收和回购价格、新产品和再制造产品需求量以及供应链的总体利润大于零,还要做到的是碳排放量尽可能低、利润尽可能高。在本文中暂不考虑,但为将来的深入研究提供了方向。

5 结束语

本文研究基于废旧产品回收质量的不确定性,探讨了碳税政策对闭环供应链定价决策的影响。分别对此状

态下的闭环供应链进行集中和分散决策,并通过改进两部定价契约对闭环供应链进行了协调。得到具体结论如下:

1) 政府部门对制造商征收碳税会导致闭环供应链利润降低,但会激励制造商从事再制造产品生产。制造商会通过提高新产品和再制造产品定价的方式降低碳税带来的利润损失,此外,制造商将生产重心转移到再制造产品也会导致新产品需求量下降,再制造产品需求量上升,从而达到减少碳排放的目的。

2) 如果再制造质量门槛不断提高,从表面来看会提高再制造产品的质量,但实际上并不会对闭环供应链的利润有积极的影响,反而制造商生产的再制造产品不会给自身带来额外的收益。制造商会通过压制废旧产品回购价格来节约再制造成本,此外,再制造质量门槛的提高致使可再制造的废旧产品数量减少,这将促使制造商生产新产品,减少再制造生产,最终导致碳排放量不降反升。

3) 分散决策造成了闭环供应链的效益损失,而运用两部定价契约与集中决策可达到同样的效果,实现闭环供应链的协调,使闭环供应链利润最优。

因此,闭环供应链上各节点企业应努力在协调机制下展开合作。同时,为了降低企业生产碳排放,政府部门应考虑按不同产品的不同质量水平向制造商征收碳税;制造企业也要根据政府部门碳税政策设定合理的再制造质量门槛,当碳税税率高时,企业可适当提高废旧产品的再制造质量门槛,当碳税税率低时,企业应考虑降低再制造质量门槛,以此来兼顾企业的经济效益和环境效益。

参考文献:

- [1] European Environment Agency (EEA). Environmental taxes implementation and environmental effectiveness [M]. Copenhagen: EEA, 1996.
- [2] ÖSTLIN J, SUNDIN E, BJORKMAN M. Importance of closed-loop supply chain relationships for product remanufacturing[J]. International Journal of Production Economics, 2008, 115(2): 336-348.
- [3] GAUR J, MANI V. Antecedents of closed-loop supply chain in emerging economies: a conceptual framework using stakeholder's perspective[J]. Resources, Conservation and Recycling, 2018, 139: 219-227.
- [4] SAVASKAN R C, BHATTACHARYA S, Van WASSENHOOVE L N. Closed-loop supply chain models with product remanufacturing[J]. Management Science, 2004, 50(2): 239-252.
- [5] 孙浩, 胡劲松, 王磊, 等. 考虑参考效应的两期闭环供应链定价策略与回收模式比较[J]. 计算机集成制造系统, 2016, 22(12): 2875-2886.
SUN H, HU J S, WANG L, et al. Pricing strategies and collection mode of two-period closed-loop supply chain based on price reference effect[J]. Computer Integrated Manufacturing System, 2016, 22(12): 2875-2886.
- [6] BHATTACHARYA R, KAUR A, AMIT R K. Price optimization of multi-stage remanufacturing in a closed loop supply chain[J]. Journal of Cleaner Production, 2018, 186: 943-962.
- [7] XIE J P, ZHANG W S, LIANG L, et al. The revenue and cost sharing contract of pricing and servicing policies in a dual-channel closed-loop supply chain[J]. Journal of Cleaner Production, 2018, 191: 361-383.
- [8] ALAMDAR S F, RABBANI M, HEYDARI J, et al. Pricing, collection, and effort decisions with coordination contracts in a fuzzy, three-level closed-loop supply chain[J]. Expert Systems with Applications, 2018, 104: 261-276.
- [9] 冯章伟, 肖条军, 柴彩春. 第三方回收商领导型两级闭环供应链的回收与定价策略[J]. 中国管理科学, 2018, 26(1): 118-127.
FENG Z W, XIAO T J, CHAI C C. Recycling and pricing strategies of closed-loop supply chain by the leader of third-party recycler[J]. Chinese Journal of Management Science, 2018, 26(1): 118-127.
- [10] 王玉燕, 申亮. 回收处理基金下闭环供应链的多元化主导模式[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(10): 2526-2541.
WANG Y Y, SHEN L. Diversified dominant modes of closed-loop supply chain under the recycling fund[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2018, 38(10): 2526-2541.
- [11] 颜荣芳, 程永宏, 王彩霞. 再制造闭环供应链最优差别定价模型[J]. 中国管理科学, 2013, 21(1): 90-97.
YAN R F, CHEN Y H, WANG C X. Strategy analysis on differential pricing in closed-loop supply chain with remanufacturing[J]. Chinese Management Science, 2013, 21(1): 90-97.
- [12] DRAKE D. F, KLEINDORFER P R, LUK B, et al. Technology choice and capacity investment under emissions regulation[J]. Production and Operations Management Society, 2016, 25(6): 1006-1025.
- [13] MOHAMMED F, SELIM S Z, HASSAN A, et al. Multi-period planning of closed-loop supply chain with carbon policies under uncertainty[J]. Transportation Research Part D: Transport and Environment, 2017, 51: 146-172.
- [14] TAO Z G, GUANG Z Y, HAO S, et al. Multi-period

- closed-loop supply chain network equilibrium with carbon emission constraints[J]. *Resources, Conservation and Recycling*, 2015, 104(Part B): 354-365.
- [15] 李浩霖, 王传旭, 李梦鸽. 考虑公平关切的闭环供应链定价和碳减排决策[J]. *上海海事大学学报*, 2018, 39(3): 27-33.
LI H L, WANG C X, LI M G. Pricing and carbon emission reduction decisions of closed-loop supply chain considering fairness concern[J]. *Journal of Shanghai Maritime University*, 2018, 39(3): 27-33.
- [16] 王道平, 李小燕, 张搏卿. 考虑政府碳排放奖惩的差别定价闭环供应链协调策略研究[J]. *管理过程学报*, 2019, 33(1): 189-191.
WANG D P, LI X Y, ZHANG B Q. Study on coordination strategy of differential price closed-loop supply chain considering the premium and penalty of government on carbon emission[J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2019, 33(1): 189-191.
- [17] 舒彤, 肖雨晴, 陈收. 政府补贴对再制造闭环供应链的影响研究[J]. *工业技术经济*, 2017(8): 68-73.
SHU T, XIAO Y Q, CHEN S. Research on the effect of government subsidies on remanufacturing in closed-loop supply chains[J]. *Journal of Industrial Technological Economics*, 2017(8): 68-73.
- [18] 马中华, 周诗宇, 徐朗. 不同权利结构下基于自执行旁支付契约的低碳供应链合作减排策略[J]. *重庆理工大学学报(自然科学版)*, 2019, 33(6): 128-138.
MA Z H, ZHOU S Y, XU L. Under the different leading structures, cooperative emission reduction strategy of low carbon supply chain based on contract with self-executing and payment by others[J]. *Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)*, 2019, 33(6): 128-138.
- [19] 杨小宁. 低碳环境下回收不确定的制造/再制造生产决策研究[D]. 南京: 东南大学, 2017.
YANG X N. Research on uncertain manufacturing/re-manufacturing production decision of recycling in low carbon environment[D]. Nanjing: Southeast University, 2017.
- [20] 马方星, 程发新, 邵汉青. 不同补贴方式下考虑回收质量不确定的闭环供应链差别定价模型[J]. *统计与决策*, 2018, 19: 58-61.
MA F X, CHEN F X, SHAO H Q. Closed-loop supply chain's differential pricing model considering recovery quality uncertainty under different subsidy methods[J]. *Statistics & Decision*, 2018, 19: 58-61.
- [21] 刘慧慧, 黄涛, 雷明. 废旧电器电子产品双渠道回收模型及政府补贴作用研究[J]. *中国管理科学*, 2013, 21(2): 123-131.
LIU H H, HUANG T, LEI M. Dual-channel recycling model of waste electrical and electronic equipment and research on effects of government subsidy[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2013, 21(2): 123-131.

Operations Research and Cybernetics

Price Strategy of Closed-Loop Supply Chain Based on Return Uncertainty Under Carbon Tax Policy

ZHANG Lingling, CHEN Huaili

(Logistics Research Center, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China)

Abstract: [Purposes] Through in-depth study of the practical problems of recycling and remanufacturing -- uncertainty of recycling quality and the carbon tax policy, the pricing decisions of the two-echelon closed-loop supply chain is discussed here, in order to explore how companies can achieve maximum economic benefits in this context. [Methods] The game theory is used to obtain the optimal wholesale price of the manufacturer, the optimal retail price of the retailer and the benefits of the members of the supply chain separately. The influences of the carbon tax rate and the quality threshold of remanufacturing on the manufacturer and retailer's price, profit and market demand are discussed. And then the two-part tariff is introduced to achieve the closed-loop supply chain coordination. [Findings] Finally, an example is given to verify the models. The results show that: when the carbon tax rate is high, the enterprises can raise the quality threshold of remanufacturing products; when the carbon tax rate is low, the enterprises should lower the quality threshold of remanufacturing products. This can help the enterprises give consideration to economic benefit and ecological benefit. [Conclusions] The government department encourages manufacturers to engage in the remanufacturing production, through the adjustment of the carbon tax rate or the collection of carbon taxes, thereby prompting enterprises to cooperate under the coordination mechanism.

Keywords: carbon tax; quality of the core uncertainty; closed-loop supply chain; pricing decision; game theory

(责任编辑 黄颖)

α -半预不变凸型及其应用研究*

李婷¹, 彭再云², 邵重阳², 王泾晶²

(1. 山西大学 商务学院, 太原 030031; 2. 重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要:【目的】提出并研究了一类新的广义凸型函数即 α -半预不变凸型函数。【方法】理论推导并举例进行验证。【结果】首先举例说明了 α -半预不变凸型函数的存在性及其与半预不变凸型函数、 α -预不变凸型函数之间的关系;然后获得了 α -半预不变凸型函数的一些性质;最后给出了 α -半预不变凸函数分别在无约束及带不等式约束的非线性规划问题中的应用,并给出实例验证了所得结论的正确性。【结论】这些结果在一定程度上丰富了对广义凸函数的研究。

关键词: α -半不变凸集; α -半预不变凸函数;非线性规划;可行集;最优解集

中图分类号:O224

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)06-0001-07

众所周知,凸性与广义凸性是数学规划研究领域里的一个重要研究分支,在最优化理论及应用研究中起到了非常重要的作用。近些年来,一些学者相继提出了不变凸型函数、预不变凸型函数、半预不变凸型函数、 α -预不变凸型函数等,并研究了这些广义凸型(类)函数的一些重要性质及它们在非线性规划问题中的一些应用^[1-9]。

受文献[5-7,9]的启发,本文提出了一类新的广义凸型函数即 α -半预不变凸型函数。首先,给出 α -半预不变凸型函数的定义,举例说明该类型函数的存在性及它们与半预不变凸型函数、 α -预不变凸型函数之间的关系;然后,获得了 α -半预不变凸型函数的一些性质;最后给出了 α -半预不变凸函数分别在无约束及带不等式约束的非线性规划问题中的应用,并给出例子对所得结论的正确性进行了验证。

1 基本概念

假设 K 为 \mathbf{R}^n 中的非空子集, $f:K \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $\alpha:K \times K \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 是两个实值函数, $\eta:K \times K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是向量值函数。

下面先回顾一些相关定义。

定义 1^[5] 如果对于 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$,有 $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y) \in K$,则称 K 为关于 η 和 α 的 α -不变凸集。

定义 2^[5] 设 K 为关于 η 和 α 的 α -不变凸集, $f:K \rightarrow \mathbf{R}$ 是实值函数,如果对 $\forall x, y \in K \forall \lambda \in [0, 1]$,有:

$$f(y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

则称 f 是 K 上关于 η 和 α 的 α -预不变凸函数。

以下定义中, $\eta:K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是向量值函数。

定义 3^[6] 如果存在一个非零向量映射 $\eta:K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$,使得对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$,有 $y + \lambda\eta(x, y, \lambda) \in K$ 成立,则称 K 为关于 η 的半连通集。

定义 4^[6] 设 K 是关于 η 的半连通集, $f:K \rightarrow \mathbf{R}$ 是实值函数。如果对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$,满足 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda\eta(x, y, \lambda) = 0$,且 $f(y + \lambda\eta(x, y, \lambda)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$,则称 f 是 K 上关于 η 的半预不变凸函数。

下面将给出 α -半不变凸集、 α -半预不变凸型函数的概念。

定义 5 如果对于 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$,有 $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \in K$,则称 K 为关于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

* 收稿日期:2019-03-26 修回日期:2019-10-26 网络出版时间:2019-11-25 10:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11301571);重庆市基础与前沿研究项目(No. cstc2018jcyjAX0337);重庆市巴渝学者计划项目、重庆市高
校科研创新团队项目(No. CXTDX201601022);重庆交通大学创新项目(No. 2019S0123)

第一作者简介:李婷,女,副教授,研究方向为最优化理论与应用,E-mail: liting99999@126.com;通信作者:彭再云,男,教授,博士,E-mail:
pengzaiyun@126.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.018.html>

下面举例说明 α -半不变凸集是存在的。

例 1 设 $K = (-\infty, +\infty)$, $\forall x, y \in K$, 令 $\alpha(x, y) = \frac{y}{2}$, $\eta(x, y, \lambda) = \begin{cases} \lambda x - y, x \geq 0, y \geq 0 \\ \lambda x - y, x < 0, y < 0 \\ -y, x \geq 0, y < 0 \\ -y, x < 0, y \geq 0 \end{cases}$, 容易验证 K 是关

于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

定义 6 设 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是实值函数。如果对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$, 满足 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \eta(x, y, \lambda) = 0$, 且 $f(y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$, 则称 f 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。

注 1 由定义 4 和定义 6 可以看出, 当 $\alpha(x, y) = 1$ 时, α -半预不变凸函数是关于同一 η 的半预不变凸函数。

注 2 由定义 2 和定义 6 可以看出, 当 $\eta(x, y, \lambda) = \eta(x, y)$ 时, α -半预不变凸函数是关于同一 α 和 η 的 α -预不变凸函数。

注 3 α -半预不变凸型函数是普遍存在的, 且 α -半预不变凸型函数是不同于半预不变凸型函数和 α -预不变凸型函数的一类新的函数, 下面通过例 2 和例 3 进行说明。

例 2 令 $K = [0, 2]$, $f(x) = \arctan x$, 其中 $\alpha(x, y) = x - y$, $\eta(x, y, \lambda) = \begin{cases} x - y - \lambda, x \leq y, \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda}, x \leq y, \lambda \in (0, 1] \\ \lambda(x + y), x > y, \lambda = 0 \\ 0, x > y, \lambda \in (0, 1] \end{cases}$, 则容易验证

f 是 K 上的 α -半预不变凸函数, 即 α -半预不变凸函数是存在的。

分析 对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有以下几种情况:

1) 当 $x \leq y, \lambda = 0$ 时, 有:

$$y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda) = y \in K, f[y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)] = f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y);$$

2) 当 $x \leq y, \lambda \in (0, 1]$ 时, 有:

$$y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda) = y + \lambda(x - y) \frac{1}{\lambda} = x \in K,$$

$$f[y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)] = f(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y);$$

3) 当 $x \geq y, \lambda = 0$ 时, 有:

$$y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda) = y \in K, f[y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)] = f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y);$$

4) 当 $x > y, \lambda \in (0, 1]$ 时, 有:

$$y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda) = y \in K,$$

$$f[y + \lambda \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)] = f(y) = \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)。$$

综上所述, f 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。

但是, 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = \sqrt{3}, \lambda = \frac{1}{2}$ 时, 有:

$$f(y + \lambda \eta(x, y, \lambda)) = f(\sqrt{3} + 1) = \arctan(\sqrt{3} + 1) > \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) = \frac{\pi}{4} = \arctan 1,$$

即 f 不是 K 上关于 η 的半预不变凸函数。

例 3 令 $K = (-\infty, +\infty)$, $f(x) = 2x - 1$, 其中:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, x \geq 0, y \geq 0 \\ 1, x < 0, y < 0 \\ y, x > 0, y < 0 \\ -1, x < 0, y > 0 \end{cases}, \eta(x, y, \lambda) = \begin{cases} x - y - \lambda, x \geq 0, y \geq 0 \\ x - y, x < 0, y < 0 \\ 0, x > 0, y < 0 \\ y - x, x < 0, y < 0 \end{cases},$$

则容易验证 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集,且 f 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数,但 f 不是 K 上关于同一 α 和 $\eta^*(x,y)=0$ 的 α -预不变凸函数。事实上,当 $x=1,y=3,\lambda=\frac{1}{2}$ 时,显然有:

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(3)=5>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=4.$$

2 α -半预不变凸函数的性质

本节将讨论 α -半预不变凸函数的几个性质。

定理 1 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集,

1) 假设 $f,g:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数,则 $f+g$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数。

2) 假设 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数, m 是一个常数,则 $f+m$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数。

3) 假设 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数, $k>0$,则 kf 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数。

证明 1) 因为 $f,g:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数,则对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

$$g(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y),$$

以上两式相加可得:

$$(f+g)(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))+g(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)=\lambda(f+g)(x)+(1-\lambda)(f+g)(y),$$

故 $f+g$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。

2) 因为 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数,则对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

从而有:

$$(f+m)(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))+m\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+m=\lambda(f(x)+m)+(1-\lambda)(f(y)+m)=\lambda(f+m)(x)+(1-\lambda)(f+m)(y),$$

故 $f+m$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。

3) 因为 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数,则对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

从而有:

$$(kf)(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\leq k(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))=\lambda(kf)(x)+(1-\lambda)(kf)(y),$$

故 kf 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。

证毕

定理 2 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集,如果 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数,则水平集 $S_k=\{x\in K:f(x)\leq k\}$ 是一个关于 η 和 α 的 α -半不变凸集,其中 $k\in\mathbf{R}$ 。

证明 $\forall x,y\in S_k$,则有 $f(x)\leq k$ 和 $f(y)\leq k$ 成立。由 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集,有:

$$y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)\in K,\forall\lambda\in[0,1],$$

由于 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数,则对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\leq\lambda k+(1-\lambda)k=k,$$

所以 $y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)\in S_k$,即 S_k 是一个关于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

证毕

定理 3 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集,如果 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, $g:I\rightarrow\mathbf{R}$ 为单增凸函数,其中 $\text{ran } gf\subseteq I$,那么复合函数 $g\circ f$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数。

证明 因为 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数,则对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}).$$

又由于 $g: I \rightarrow \mathbf{R}$ 为单增凸函数, 则有:

$$g[f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda))] \leq g[\lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})] \leq \lambda g[f(\mathbf{x})] + (1-\lambda)g[f(\mathbf{y})],$$

即 $g \circ f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) \leq \lambda g \circ f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g \circ f(\mathbf{y})$.

故复合函数 $g \circ f$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。证毕

定理 4 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 令 I 为有限或无限指标集, $f_i: K \rightarrow \mathbf{R} (i \in I)$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数簇, 记 $f(\mathbf{x}) = \sup\{f_i(\mathbf{x}), i \in I\}$, $\forall \mathbf{x} \in K$. 如果对 $\forall \mathbf{x} \in K$ 都存在一个 $i_j = i(\mathbf{x}) \in I$, 使得 $f(\mathbf{x}) = f_{i_j}(\mathbf{x})$, 那么 f 一定是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。

证明 假设 f 不是 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, 则存在 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) > \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}). \quad (1)$$

令 $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$, 根据假设条件可知: $\exists i_0 := i(\mathbf{z}), \exists i_1 := i(\mathbf{x}), \exists i_2 := i(\mathbf{y})$, 使得 $f(\mathbf{z}) = f_{i_0}(\mathbf{z}), f(\mathbf{x}) = f_{i_1}(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) = f_{i_2}(\mathbf{y})$, 因为 $f_i: K \rightarrow \mathbf{R} (i \in I)$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数簇, 所以 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, \lambda \in [0, 1]$, 有 $f_{i_0}(\mathbf{z}) = f_{i_0}(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) \leq \lambda f_{i_0}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f_{i_0}(\mathbf{y})$.

又因为 $f_{i_0}(\mathbf{x}) \leq f_{i_1}(\mathbf{x}), f_{i_0}(\mathbf{y}) \leq f_{i_2}(\mathbf{y})$, 所以 $f_{i_0}(\mathbf{z}) \leq \lambda f_{i_1}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f_{i_2}(\mathbf{y})$, 即:

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}).$$

上式与(1)式矛盾, 故结论得证。证毕

定理 5 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 如果 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是关于 η 和 α 的可微 α -半预不变凸函数, 则 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, \forall \lambda \in (0, 1]$, 有 $\langle \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla f(\mathbf{y}), \hat{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$, 其中 $\hat{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$.

证明 由 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是关于 η 和 α 的可微 α -半预不变凸函数知, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, \forall \lambda \in (0, 1]$, 满足 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = 0$, 且 $f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$, 从而有:

$$\frac{f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) - f(\mathbf{y})}{\lambda} \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}),$$

在上式两端令 $\lambda \rightarrow 0^+$, 得 $\langle \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla f(\mathbf{y}), \hat{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$, 其中 $\hat{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$. 证毕

定理 6 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $g: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是两个实值函数. 如果 $f(\mathbf{x}) \geq 0, g(\mathbf{x}) > 0$, 且 f 和 $-g$ 关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, 则 $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ 是关于 α 和 $\bar{\eta}$ 的 α -半预不变凸函数, 其中:

$$\bar{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = \frac{g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda).$$

证明 由 f 和 $-g$ 关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, 且 $f(\mathbf{x}) \geq 0, g(\mathbf{x}) > 0$, 则 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$\frac{f}{g}(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\bar{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) = \frac{f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\bar{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda))}{g(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\bar{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda))} = \frac{f\left[\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})}\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)\right]}{g\left[\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})}\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)\right]} \leq$$

$$\frac{\frac{\lambda g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})}f(\mathbf{x}) + \left[1 - \frac{\lambda g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})}\right]f(\mathbf{y})}{\frac{\lambda g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})}g(\mathbf{x}) + \left[1 - \frac{\lambda g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})}\right]g(\mathbf{y})}$$

$$\frac{\lambda f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})f(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})g(\mathbf{y})} = \lambda \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} + (1-\lambda) \frac{f(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})} = \lambda \frac{f}{g}(\mathbf{x}) + (1-\lambda) \frac{f}{g}(\mathbf{y}),$$

从而 $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ 是关于 α 和 $\bar{\eta}$ 的 α -半预不变凸函数, 其中 $\bar{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = \frac{g(\mathbf{y})}{\lambda g(\mathbf{y}) + (1-\lambda)g(\mathbf{x})} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$. 证毕

3 α -半预不变凸函数与最优化

本节将分别给出在无约束与带不等式约束下, α -半预不变凸型规划问题的几个最优性结果, 并举例来验证所

得结果的正确性。

先考虑如下形式的无约束非线性规划问题(P_1):

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}), \\ & \text{s. t. } \mathbf{x} \in K, \end{aligned}$$

其中 K 是 \mathbf{R}^n 的非空子集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 。

定理 7 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, 则问题 (P_1) 的每一个局部最优解一定是它的全局最优解。如果对 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$, 有 $f(\mathbf{y} + \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 1)) = f(\mathbf{x})$, 则问题 (P_1) 的最优解集是关于同一 η 和 α 的 α -半不变凸集。

证明 1) 假设 $\mathbf{x}_0 \in K$ 是问题 (P_1) 的一个局部最优解, 但不是全局最优解, 则 $\exists \mathbf{x}^* \in K$, 使得:

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}_0). \quad (2)$$

由 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数及 (2) 式知, 对 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(\mathbf{x}_0 + \lambda\alpha(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0)\eta(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0, \lambda)) \leq \lambda f(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_0) < \lambda f(\mathbf{x}_0) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0),$$

于是, 对 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(\mathbf{x}_0 + \lambda\alpha(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0)\eta(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0, \lambda)) < f(\mathbf{x}_0), \quad (3)$$

而 K 是 α -半不变凸集, 所以 $\mathbf{x}_0 + \lambda\alpha(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0)\eta(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0, \lambda) \in K$ 。

当 $\lambda > 0$ 且充分小时, (3) 式与 $\mathbf{x}_0 \in K$ 是问题 (P_1) 的一个局部最优解矛盾。故 $\mathbf{x}_0 \in K$ 是问题 (P_1) 的全局最优解, 即问题 (P_1) 的每一个局部最优解一定是它的全局最优解。

2) 设 A 是问题 (P_1) 的最优解集, 则 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 有 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ 。

当 $\lambda = 0, 1$ 时, 显然有 $\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \in A$ 成立。因此, 要证 A 是关于同一 η 和 α 的 α -半不变凸集, 只需证明 $\forall \lambda \in (0, 1), \mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \in A$ 成立即可。

因为 K 是 α -半不变凸集, 所以 $\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \in A$ 。

假设 $\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \notin A$, 则:

$$f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) > f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}). \quad (4)$$

由 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数及 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, 有:

$$f(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}),$$

上式与 (4) 式矛盾, 故 $\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \in A$ 。

因此问题 (P_1) 的最优解集 A 是关于同一 η 和 α 的 α -半不变凸集。

证毕

下面的例 4 验证了定理 7 所得结果的正确性。

例 4 设 $K = [-1, 0], \alpha(x, y) = \cos x, \eta(x, y, \lambda) = \frac{\lambda x - y}{\cos x}, f(x) = 1 - x$, 容易验证 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 函数 f 是关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。取 $x = 0$, 显然 $x = 0$ 是问题 (P_1) 的局部最优解, 也是 (P_1) 的全局最优解。容易验证最优解集 $A = \{0\}$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

考虑如下带不等式约束的非线性规划问题 (P_2):

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & \text{s. t. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in J = \{1, \dots, m\}, \mathbf{x} \in K, \end{aligned}$$

其中 K 是 \mathbf{R}^n 的非空子集, $f, g_i: K \rightarrow \mathbf{R}, i \in J$ 。可行集 $D = \{\mathbf{x} \in K \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in J\}$ 。

定理 8 设 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $g_i: K \rightarrow \mathbf{R} (i \in J)$ 在 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸型函数, 且对 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$, 有 $g_i(\mathbf{y} + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 1)) \leq g_i(\mathbf{x}) (i \in J), f(\mathbf{y} + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 1)) = f(\mathbf{x})$, 则问题 (P_2) 的可行解集 D 和最优解集 A 均是关于同一 η 和 α 的 α -半不变凸集。

证明 1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \in K$, 且 $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, g_i(\mathbf{y}) \leq 0, i \in J$ 。

又 $g_i: K \rightarrow \mathbf{R} (i \in J)$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, 则 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \lambda \in (0, 1)$, 有:

$$g_i(\mathbf{y} + \lambda\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)) \leq \lambda g_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g_i(\mathbf{y}) \leq 0, i \in J.$$

故 $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \in D$ 。

又当 $\lambda=0, 1$ 时, $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \in D$ 成立。所以 D 是关于同一 η 和 α 的 α -半不变凸集。

2) $\forall x, y \in A, x \neq y$, 有 $f(x) = f(y)$ 。由 1) 的证明过程可知 $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \in D$, 假设 $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \notin A$, 则:

$$f(y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) > f(x) = f(y). \quad (5)$$

由 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数及 $f(x) = f(y)$, 有:

$$f(y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = f(x) = f(y).$$

上式与(5)式矛盾, 故 $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \in A$ 。

因此问题(P₁)的最优解集 A 是关于同一 η 和 α 的 α -半不变凸集。

证毕

定理 9 设 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $g_i: K \rightarrow \mathbf{R} (i \in J)$ 在 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, 如果 $\bar{x} \in D$ 是问题(P₂)的局部最优解, 那么 \bar{x} 一定是(P₂)的全局最优解。

证明 反设 \bar{x} 不是问题(P₂)的全局最优解, 则存在点 $x^* \in D$, 使得 $f(x^*) < f(\bar{x})$ 。

由定理 8 知, $\forall \lambda \in (0, 1)$, 有 $\bar{x} + \lambda\alpha(x^*, \bar{x})\eta(x^*, \bar{x}, \lambda) \in D$ 。

类似定理 7 的证明过程可知, $\forall \lambda \in (0, 1)$, 有 $f(\bar{x} + \lambda\eta(x^*, \bar{x}, \lambda)) < f(\bar{x})$, 当 $\lambda > 0$ 且充分小时, 上式与 \bar{x} 是问题(P₂)的局部最优解矛盾。故 \bar{x} 是(P₂)的全局最优解。

证毕

下面举例验证定理 8 和定理 9。

例 5 考虑如下带不等式约束的非线性规划问题(P₂):

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \sin |x|, \\ \text{s. t. } g_1(x) &= |x| - 1 \leq 0, \\ g_2(x) &= 2x^2 - 1 \leq 0, x \in K, \end{aligned}$$

其中 $K = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha(x, y) = e^x$, $\eta(x, y, \lambda) = \frac{\lambda x - y}{e^x}$ 。

由定义 6, 容易验证 f, g_1, g_2 均为 K 上关于同一 η 和 α 的 α -半预不变凸函数, 即定理 8 和定理 9 的所有假设均满足。

通过计算, 可行解集 $D = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, 最优解集 $A = \{0\}$, 显然 D 和 A 均是关于同一 η 和 α 的 α -半不变凸集, 而且可验证 $x=0$ 是问题(P₂)的局部最优解, 也是全局最优解。故定理 8 和定理 9 结论成立。

4 总结

本文研究了一类新的广义凸型函数 α -半预不变凸型函数, 说明了此类函数的存在性及其与相关广义凸型函数间的关系, 得到了此类函数的良好性质; 并给出了 α -半预不变凸函数在两类非线性规划问题中的应用。对于 α -半预不变凸型函数的研究是很有意义的, 能否得到此类函数在分式规划、多目标规划问题最优性及其对偶中的应用, 这将是后续有趣的研究课题。

参考文献:

- [1] WEIR T, MOND B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136(1): 29-38.
- [2] WEIR T, JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1988, 38(2): 177-189.
- [3] YANG X M, LI D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258(1): 287-308.
- [4] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. On properties of semi-preinvex functions[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2003, 68(3): 449-459.
- [5] NOOR M A, NOOR K I. Some characterizations of strongly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2006, 316(2): 697-706.
- [6] YANG X Q, CHEN G Y. A class of nonconvex functions

and pre-variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 1992, 169(2): 359-373.

[7] PENG Z Y, CHANG S S. Some properties of semi- G -preinvex functions[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(3): 873-884.

[8] 李科科, 彭再云, 万轩, 等. 严格 G -半预不变凸性及其应用研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2015, 32(6): 1-8.

LI K K, PENG Z Y, WAN X, et al. The study of strict G -

semi-preinvexity and its application[J]. Journal of Normal University (Natural Science), 2015, 32(6): 1-8.

[9] 李科科, 彭再云, 刘亚威, 等. 半预拟不变凸性的性质与应用注记[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(1): 12-22.

LI K K, PENG Z Y, LIU Y W, et al. Notes on characterizations and applications of semi-prequasi-invexity[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(1): 12-22.

Operations Research and Cybernetics

The Study of α -Semi-preinvexity and Its Applications

LI Ting¹, PENG Zaiyun², SHAO Chongyang², WANG Jingjing²

(1. College of Business, Shanxi University, Taiyuan 030031;

2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: [Purposes] A class of new generalized convex function: α -semi-preinvexity functions is mainly studied here. [Methods] Theoretical analysis, and examples for validation. [Findings] Firstly, an example is given to show the existence of α -semi-preinvexity functions and the relationship with preinvexity functions. Secondly, some properties of the α -semi-preinvexity functions are discussed. Finally, some optimality results are obtained in nonlinear programming problems without constraint and with inequality constraint, and examples are given for illustration of the corresponding results. [Conclusions] The obtained results enrich the study of generalized convex functions.

Keywords: α -semi-invex set; α -semi-preinvexity functions; nonlinear programming; the feasible set; the optimal solution set

(责任编辑 黄颖)

加工时间与位置相关的最小化最大完工时间两人合作排序博弈*

刘鹏, 王小丽

(沈阳工业大学 管理学院, 沈阳 110870)

摘要:【目的】针对加工时间与加工位置相关的两人合作排序博弈问题开展研究。【方法】工件加工时间与加工位置相关可以描述为工件加工时间随着加工序列中工件加工位置的改变而呈现出递增或递减的函数变化。两个人必须合作加工一批工件,两人各自都有一台机器可用于加工这批工件,且他们的加工成本定义为各自的最小完工时间。目标是使得他们的合作收益最大化,为了使这两个人的合作总收益最大化,需对这批工件进行一个划分,把工件分配给两台机器。【结果】提出了该问题有正整数解的充分必要条件。【结论】证明了该问题是多项式可解的。

关键词:排序;合作博弈;老化效应;学习效应

中图分类号:O221.7

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)06-0008-07

实际生产加工过程中,往往存在一个人不能单独完成一个项目,而需要两个人合作才能完成的情况。每个人都有一台机器可用于加工这个项目里的所有工件,需要找到这批工件的一个合理的划分,以达成一个合理的利润分配方案。在许多实际排序背景中,工件的加工时间可能与该工件在加工序列中的实际加工位置有关,这种现象被称为“老化效应”或“学习效应”。老化效应即工件的实际加工时间与工件的实际加工位置呈递增的变化趋势,而学习效应则与之相反,工件的实际加工时间与工件的实际加工位置呈递减的变化趋势。在现有文献中,极少研究带有老化效应或学习效应的两人合作排序博弈问题,然而这种现象在现实调度环境中经常出现,因此具有研究价值。

近些年来,工件加工时间与位置相关的排序问题也越来越多地受到关注。Bachman 等人^[1]研究了一些单机排序问题,其中工件加工时间是与位置相关的递增或递减函数,分别为老化效应和学习效应。Choi^[2]研究了具有工件相关老化效应的最小化总加权完工时间的双代理排序问题。Kim 等人^[3]考虑了具有老化效应和延误的基于加工时间和的双代理单价排序问题。刘春来等人^[4]研究了具有退化工件和老化效应的单机可拒绝排序问题。Cheng 等人^[5]分析了具有批相关老化效应和可变维修活动的单机排序问题。刘春来等人^[6]研究了具有学习效应的平行机排序问题。Shiau 等人^[7]研究了具有学习效应的最小化总完工时间的双代理两机流水线排序问题。Wu 等人^[8]给出了具有基于加工时间和的学习效应的双代理排序问题的一个组合方法。闫萍等人^[9]研究了带准备时间的单机指数时间学习效应排序问题。郭苗苗等人^[10]研究了具有学习效应和加工时间可控的平行机排序问题。Liu 等人^[11]研究了具有学习效应和迟后的双代理排序问题的分支定界算法。本文所研究的模型与上述研究的模型的主要区别在于,本文将合作博弈引入到具有老化效应或学习效应的排序模型之中。

关于排序博弈问题的研究,唐国春等人^[12]对排序博弈进行了综述,给出了排序博弈的分类进展和展望。金霖等人^[13]研究了加工工件都相同的情况下,由最小的最大完工时间作为加工成本的两人合作博弈问题。窦文卿等人^[14]研究在相同工件的情况下,以最小化总完工时间作为加工成本的两人合作博弈问题,给出了此问题的纳什博弈解。Gu 等人^[15]研究了以最小化最大延误作为加工成本的两人合作博弈问题。Liu 等人^[16]以最小化加权误工任务数作为加工成本的两人合作博弈问题。Liu 等人^[17]研究了具有可变加工时间和共同工期的以最小化最大延误作为加工成本的两人合作博弈问题。以上提到的关于合作博弈的排序文献都不曾考虑老化效应或学习效应相关的排序问题。

* 收稿日期:2019-09-03 修回日期:2019-10-23 网络出版时间:2019-11-25 10:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 71001074);辽宁省社会科学规划基金重点项目(No. L15AGL013);辽宁省教育厅科研项目(No. WJGD2019002);辽宁省自然科学基金(No. 201602545)

第一作者简介:刘鹏,男,教授,博士生导师,研究方向为生产调度、物流优化,E-mail:liup7802@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.022.html>

本文其他章节组织如下:文章第一部分对本文要提出的问题描述,第二和第三部分结合老化效应和学习效应对两人合作排序博弈问题分别进行讨论,第四部分则是对文章进行总结。

1 问题描述

对于具有老化效应或学习效应的最小化最大完工时间的两人合作排序博弈问题的描述如下。设有工件集 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, 所有工件在“0”时刻开始加工, 每个工件只能被加工一次且在加工过程中没有中断。假设有两个人, 每个人都拥有一台机器可用于加工工件, 两个人合作竞争加工这 n 个工件。工件 J_j 的加工时间 p_j 是关于工件加工位置 r 的函数。本文研究具有老化效应或学习效应的两个排序模型, 即为: 1) 老化效应, $p_j = P_0 + ar$; 2) 学习效应, $p_j = P_0 - ar$ 。其中: $j = 1, 2, \dots, n, r = 1, 2, \dots, n, P_0$ 代表工件的正常加工时间, $a > 0$ 表示模型 1) 中的老化效率和模型 2) 中的学习效率。由于工件的加工时间恒为正, 所以假设在学习效应模型中有 $a < \frac{P_0}{n}$ 成立。

在两人合作博弈模型中, 用 C_j 来表示工件 J_j 的完工时间。如果用 X_1 和 X_2 分别表示两个人各自所承担的工件的集合, 则有 $X_1 \cup X_2 = J, X_1 \cap X_2 = \emptyset$ 。对于第 i 人 ($i = 1, 2$), 单位时间每加工一个工件将获得 b_i ($i = 1, 2$) 单位的收益。工件的加工成本用工件的最小化最大完工时间 $\min C_{\max}^i = \min \max \{C_j | j \in X_i\}$ 来表示, 那么第 i 人 ($i = 1, 2$) 的收益函数可以定义为 $u_i = b_i \sum_{j \in X_i} p_j - \min C_{\max}^i$ 。如果两个人不能达成协议, 那么第 i 人独自获得收益 $e_i, e_i \geq 0$ ($i = 1, 2$)。因此, 第 i 人 ($i = 1, 2$) 的合作收益可以表示为 $v_i = u_i(X_i) - e_i = b_i \sum_{j \in X_i} p_j - \min C_{\max}^i - e_i$ 。两个人的总收益用 v_1 和 v_2 的乘积来表示, 目标就是使两个人总收益的乘积达到最大。

利用三元组表示法来描述模型, 具有老化效应两人合作博弈模型表示为 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 具有学习效应的两个合作博弈模型表示为 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 。第 1 个域 $G2$ 表示两人合作博弈且每个人都有台机器; 第 2 个域描述的是工件的特征, 即工件加工时间的结构特点。第 3 个域表示要优化的目标函数, 即以最小的最大完工时间作为加工成本使得两个人的合作收益函数的乘积为最大。

2 具有老化效应的两人合作排序博弈问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$

本节考虑工件加工时间为老化效应 $p_j = P_0 + ar$ 时, 以最小的最大完工时间作为加工成本使得两个人的合作收益函数的乘积为最大的两人合作排序博弈问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 。对于工件集 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, 需要将工件集 J 划分为两个互不相交的子集 X_1 和 X_2 , 使第 1 人所承担的工件集合 X_1 中所含的工件个数为 k , 第 2 人所承担的工件集合 X_2 中所含的工件个数为 $n - k$, 其中 $1 \leq k \leq n - 1$ 。

接下来通过归纳法推导出在 X_1 内加工完第 k 个位置工件的时间为 $C_k = kP_0 + \frac{k(k+1)}{2}a$ 。

$$1) C_1 = p_1 = P_0 + a, C_2 = C_1 + p_2 = (P_0 + a) + (P_0 + 2a) = 2P_0 + \frac{2 \times (1+2)}{2}a。$$

2) 假设工件 J_j 的完工时间为 $C_j = jP_0 + \frac{j(j+1)}{2}a$, 则有工件 J_{j+1} 的完工时间为:

$$C_{j+1} = C_j + p_{j+1} = jP_0 + \frac{j(j+1)}{2}a + (P_0 + a(j+1)) = (j+1)P_0 + \frac{(j+1)(j+2)}{2}a。$$

因此, 证明了 $C_k = kP_0 + \frac{k(k+1)}{2}a$ 。可以看出对任意的工件加工顺序, 这是一个固定的常数。

同理, 第 2 人所承担的工件集合 X_2 加工完第 n 个位置工件的时间为 $C_n = (n-k)P_0 + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$ 。

第 2 人所承担的工件集合的完工时间可由如下推导:

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= p_{k+1} = P_0 + a, \\ C_{k+2} &= C_{k+1} + p_{k+2} = 2P_0 + (1+2)a, \\ &\dots \dots \end{aligned}$$

$$C_n = (n-k)P_0 + (1+2+\dots+n-k)a = (n-k)P_0 + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a。$$

同样,对任意的工件加工顺序,这也是一个固定的常数。

因为 $C_k = kP_0 + \frac{k(k+1)}{2}a$ 和 $C_n = (n-k)P_0 + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$ 都是固定的常数,所以收益函数 u_i 与 X_i 内工件的加工次序无关,仅与 X_i 内工件个数有关,从而划分工件集 J 时只需考虑给每个人分配多少个工件。

第 1 人和第 2 人的收益函数分别为:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 \sum_{j \in X_1} p_j - \min C_{\max}^1 = b_1 \sum_{j \in X_1} p_j - C_{\max}^1 = b_1 \sum_{j \in X_1} p_j - \sum_{j \in X_1} p_j = (b_1 - 1) \sum_{j \in X_1} p_j = \\ & (b_1 - 1)C_k = (b_1 - 1) \left[kP_0 + \frac{k(k+1)}{2}a \right] = \frac{b_1 - 1}{2} [2kP_0 + k(k+1)a], \\ u_2 &= (b_2 - 1) \sum_{j \in X_2} p_j = (b_2 - 1)C_n = (b_2 - 1) \left[(n-k)P_0 + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a \right] = \\ & \frac{b_2 - 1}{2} [2(n-k)P_0 + (n-k)(n-k+1)a]. \end{aligned}$$

且收益函数必为正,所以有 $b_i > 1 (i=1, 2)$ 。

因此第 1 人和第 2 人的合作收益函数分别可描述为关于正整数 k 的如下形式:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1(X_1) - e_1 = u_1(k) - e_1 = \frac{b_1 - 1}{2} [2kP_0 + k(k+1)a] - e_1 = \frac{b_1 - 1}{2} [2kP_0 + k(k+1)a - A] = \\ & \frac{a(b_1 - 1)}{2} \left[k^2 + \left(\frac{2P_0}{a} + 1 \right) k - \frac{A}{a} \right], \\ v_2 &= u_2(k) - e_2 = \frac{b_2 - 1}{2} [2(n-k)P_0 + (n-k)(n-k+1)a - B] = \\ & \frac{a(b_2 - 1)}{2} \left[k^2 - \left(\frac{2P_0}{a} + 2n + 1 \right) k + \left(n^2 + \frac{2nP_0}{a} + n - \frac{B}{a} \right) \right], \end{aligned}$$

其中: $A = \frac{2e_1}{b_1 - 1}, B = \frac{2e_2}{b_2 - 1}$ 。

在上述 v_1 中的 $\Delta_1 = \frac{4A}{a} + \left(\frac{2P_0}{a} + 1 \right)^2$ 和 v_2 中的 $\Delta_2 = \frac{4B}{a} + \left(\frac{2P_0}{a} + 1 \right)^2$, 从而只考虑以下的情况:

$$\Delta_i \geq 0, e_i \geq 0, b_i > 1 (i=1, 2), a > 0, 1 \leq k \leq n-1. \quad (1)$$

在 $\Delta_i \geq 0$ 的情况下, $v_1 v_2$ 可以表示成如下形式:

$$v_1 v_2 = \frac{a^2 (b_1 - 1)(b_2 - 1)}{4} (k - \alpha_1)(k - \alpha_2)(k - \alpha_3)(k - \alpha_4), \quad (2)$$

其中: $\alpha_1 = - \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\frac{A}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2}$, $\alpha_2 = - \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{A}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2}$, $\alpha_3 = n + \frac{1}{2} + \frac{P_0}{a} - \sqrt{\frac{B}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2}$, $\alpha_4 = n + \frac{1}{2} + \frac{P_0}{a} + \sqrt{\frac{B}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2}$ 。

引理 1 问题 G2 | $p_j = P_0 + ar$ | $v_1 v_2 / C_{\max}$ 有正整数解 k 的充要条件是:

$$\beta_l \leq \beta_m, \quad (3)$$

其中: $\beta_l = \lfloor \alpha_2 \rfloor + 1, \beta_m = \lceil \alpha_3 \rceil - 1$ 。

证明 若问题有解,则两人合作收益函数 v_1 和 v_2 必须大于 0,即存在 $k (k \in \{1, 2, \dots, n-1\})$ 使得 $v_i(k) > 0, i=1, 2$ 。

由于 $v_1 > 0$, 所以可以得到 $k^2 + \left(\frac{2P_0}{a} + 1 \right) k - \frac{A}{a} > 0$, 即 $k < - \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\frac{A}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2}$ 或 $k > \sqrt{\frac{A}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2} - \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)$ 。所以,可得 $k < \alpha_1$ 或 $k > \alpha_2$ 。

同理,可由 $v_2 > 0$ 得 $k^2 - \left(\frac{2P_0}{a} + 2n + 1 \right) k + \left(n^2 + \frac{2nP_0}{a} + n - \frac{B}{a} \right) > 0$, 即:

$$k < n + \frac{1}{2} + \frac{P_0}{a} - \sqrt{\frac{B}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2} \text{ 或 } k > n + \frac{1}{2} + \frac{P_0}{a} + \sqrt{\frac{B}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \right)^2},$$

因此 $k < \alpha_3$ 或 $k > \alpha_4$ 。

因为 $\alpha_1 < 0, \alpha_4 > n$, 所以就有 $\alpha_2 < k < \alpha_3$ 。因为两人要合作, 所以 $1 \leq k \leq n-1$, 可得 $k \in (\alpha_2, \alpha_3) \cap [1, n-1]$ 。因为 k 是整数, 所以令 $\beta_l = \lfloor \alpha_2 \rfloor + 1, \beta_m = \lceil \alpha_3 \rceil - 1$ 。

由 $\alpha_2 = -\left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{A}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2}\right)^2}$ 与 $\alpha_3 = n + \frac{1}{2} + \frac{P_0}{a} - \sqrt{\frac{B}{a} + \left(\frac{P_0}{a} + \frac{1}{2}\right)^2}$ 可知 $0 < \alpha_2 < n-1, 1 \leq \alpha_3 < n, n \geq 2, \alpha_2 < \alpha_3$, 所以 $1 \leq \beta_l \leq n-1, 1 \leq \beta_m \leq n-1$ 。

问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 有解等价于闭区间 $[\beta_l, \beta_m]$ 至少有一个正整数 k , 即 $\beta_l \leq \beta_m$ 。因此, 问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 有一个正整数解 k 的充要条件是 $\beta_l \leq \beta_m$ 。证毕

设 $v_1(x) \cdot v_2(x)$ 是关于 x 的四次多项式, 且表达式为:

$$v_1(x) \cdot v_2(x) = \frac{a^2(b_1-1)(b_2-1)}{4}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)。$$

则 $[v_1(x) \cdot v_2(x)]' = 0$ 是关于 x 的三次多项式, 所以 $[v_1(x) \cdot v_2(x)]' = 0$ 有 3 个根, 可分别设为 ψ_1, ψ_2, ψ_3 , 且有 $\psi_1 < \psi_2 < \psi_3$, 则 ψ_1, ψ_2, ψ_3 是 $v_1(x) \cdot v_2(x)$ 的 3 个极值点, 且 ψ_2 是 $v_1(x) \cdot v_2(x)$ 唯一的极大值点。若 $\psi_2 \in [\beta_l, \beta_m]$, 则可得到 ψ_2 是 $v_1(x) \cdot v_2(x)$ 在 $[\beta_l, \beta_m]$ 区间上的唯一极值点, 也是最大值点。

引理 2 在(1),(3)式成立的条件下, 问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 的最优解一定在闭区间 $[\beta_l, \beta_m]$ 上。

证明 在满足(1),(3)式的情况下, 根据(2)式可知 $[v_1(k) \cdot v_2(k)]' = 0$ 有 3 个根, 可设为 ψ_1, ψ_2, ψ_3 , 且它们的关系为 $\psi_1 < \psi_2 < \psi_3$ 。则 ψ_1, ψ_2, ψ_3 是 $v_1(k) \cdot v_2(k)$ 的 3 个极值点且有 $\beta_l \leq \psi_2 \leq \beta_m$ 。因为(2)式关于 k 的四次多项式系数为正, 所以 $[v_1(k) \cdot v_2(k)]'$ 的三次多项式的系数也是正值, 根据多项式函数可知 ψ_2 是 $v_1(k) \cdot v_2(k)$ 的唯一极大值点也是最大值点。所以问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 的最优解一定在闭区间 $[\beta_l, \beta_m]$ 上。证毕

由引理 1 和引理 2, 可以得出下面的定理 1。

定理 1 在(3)式成立时, 问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 存在一个最优解 k^* , 且 $k^* = \lfloor \psi_2 \rfloor$ 或 $k^* = \lceil \psi_2 \rceil$ 。最优解 k^* 具体如下:

1) 若 $\lceil \psi_2 \rceil \in [\beta_l, \beta_m]$ 且 $\lfloor \psi_2 \rfloor \notin [\beta_l, \beta_m]$, 则 $k^* = \lceil \psi_2 \rceil$;

2) 若 $\lfloor \psi_2 \rfloor \in [\beta_l, \beta_m]$ 且 $\lceil \psi_2 \rceil \notin [\beta_l, \beta_m]$, 则 $k^* = \lfloor \psi_2 \rfloor$;

3) 若 $\lceil \psi_2 \rceil \in [\beta_l, \beta_m]$ 且 $\lfloor \psi_2 \rfloor \in [\beta_l, \beta_m]$, 则有: i) 当 $v_1(\lfloor \psi_2 \rfloor) \cdot v_2(\lfloor \psi_2 \rfloor) \leq v_1(\lceil \psi_2 \rceil) \cdot v_2(\lceil \psi_2 \rceil)$ 时, $k^* = \lceil \psi_2 \rceil$; ii) 当 $v_1(\lfloor \psi_2 \rfloor) \cdot v_2(\lfloor \psi_2 \rfloor) \geq v_1(\lceil \psi_2 \rceil) \cdot v_2(\lceil \psi_2 \rceil)$ 时, $k^* = \lfloor \psi_2 \rfloor$ 。

3 具有学习效应的两人合作排序博弈问题 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$

本节考虑工件加工时间为学习效应 $p_j = P_0 - ar$ ($0 < a < \frac{P_0}{n}$) 时, 以最小的最大完工时间作为加工成本使得两个人的合作收益函数的乘积为最大的两人合作排序博弈问题 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 。

对于该问题, 可与前面类似得到:

$$C_k = kP_0 - (1+2+\dots+k)a = kP_0 - \frac{k(k+1)}{2}a, \text{对任意的工件加工顺序, 这是一个固定的常数;}$$

$C_n = (n-k)P_0 - (1+2+\dots+n-k)a = (n-k)P_0 - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$, 对任意的工件加工顺序, 这也是一个固定的常数。

因为 $C_k = kP_0 - \frac{k(k+1)}{2}a$ 和 $C_n = (n-k)P_0 - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$ 都是固定的常数, 所以收益函数 u_i 与 X_i 内工件的加工次序无关, 仅与 X_i 内工件个数有关。从而划分工件集 J 时只需考虑给每个人分配多少个工件。

两人的收益函数为: $u_1 = \frac{b_1-1}{2}[2kP_0 - k(k+1)a], u_2 = \frac{b_2-1}{2}[2(n-k)P_0 - (n-k)(n-k+1)a]$ 。因为收益函数为正, 所以 $b_i > 1 (i=1, 2)$ 。

两个人的合作收益函数分别为:

$$v_1 = \frac{b_1-1}{2}[2kP_0 - k(k+1)a - A] = \frac{a(1-b_1)}{2} \left[k^2 - \left(\frac{2P_0}{a} - 1\right)k + \frac{A}{a} \right] =$$

$$\frac{a(1-b_1)}{2} \left[\left(k - \left(\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2P_0}{a} - 1 \right)^2 - \frac{4A}{a}} \right) \right) \left(k - \left(\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2P_0}{a} - 1 \right)^2 - \frac{4A}{a}} \right) \right) \right],$$

$$v_2 = \frac{b_2-1}{2} [2(n-k)P_0 - (n-k)(n-k+1)a - B] = \frac{a(1-b_2)}{2} \left[k^2 - \left(2n+1 - \frac{2P_0}{a} \right) k + \left(n^2 + n - \frac{2nP_0}{a} + \frac{B}{a} \right) \right] =$$

$$\frac{a(1-b_2)}{2} \left[k - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2P_0}{a} - 1 \right)^2 - \frac{4B}{a}} \right) \right] \left[k - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{P_0}{a} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2P_0}{a} - 1 \right)^2 - \frac{4B}{a}} \right) \right],$$

其中: $A = \frac{2e_1}{b_1-1}, B = \frac{2e_2}{b_2-1}$ 。

在上述 v_1 中的 $\Delta_1 = \left(\frac{2P_0}{a} - 1 \right)^2 - \frac{4A}{a}$ 和 v_2 中的 $\Delta_2 = \left(\frac{2P_0}{a} - 1 \right)^2 - \frac{4B}{a}$, 当 $\Delta_i < 0$ 时, v_1 和 v_2 没有意义。因此本节只研究以下情况:

$$\Delta_i \geq 0, e_i \geq 0, b_i > 1 (i=1, 2), 0 < a < \frac{P_0}{n}, 1 \leq k \leq n-1. \quad (4)$$

在满足 $\Delta_i \geq 0$ 条件下, $v_1 v_2$ 可表示为如下的形式:

$$v_1 v_2 = \frac{a^2(b_1-1)(b_2-1)}{4} (k-\gamma_1)(k-\gamma_2)(k-\gamma_3)(k-\gamma_4), \quad (5)$$

其中: $\gamma_1 = \left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{A}{a}}, \gamma_2 = \left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{A}{a}}, \gamma_3 = n + \frac{1}{2} - \frac{P_0}{a} - \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{B}{a}}, \gamma_4 = n + \frac{1}{2} - \frac{P_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{B}{a}}$ 。

为了下文叙述方便, 令 $\gamma_5 = \frac{P_0}{a} - \frac{1}{2}, \gamma_6 = n + \frac{1}{2} - \frac{P_0}{2a}$ 。

引理 3 问题 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 有正整数解 k 的充要条件是:

$$\eta_l \leq \eta_m, \quad (6)$$

其中: $\eta_l = \max\{\eta_{l1}, \eta_{l2}\}, \eta_{l1} = \lfloor \gamma_1 \rfloor + 1, \eta_{l2} = \lfloor \gamma_6 \rfloor + 1, \eta_m = \min\{\eta_{m1}, \eta_{m2}\}, \eta_{m1} = \lceil \gamma_5 \rceil - 1, \eta_{m2} = \lceil \gamma_4 \rceil - 1$ 。

证明 若问题有解, 则两人合作收益函数 v_1 和 v_2 必须大于 0, 即存在 $k (k \in \{1, 2, \dots, n-1\})$ 使得 $v_i(k) > 0, i=1, 2$ 。

由 $v_1 > 0$ 可得 $k^2 - \left(\frac{2P_0}{a} - 1 \right) k + \frac{A}{a} < 0$, 即:

$$\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{A}{a}} < k < \left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{A}{a}},$$

则有 $\gamma_1 < k < \gamma_2$ 。

因为 $0 < a < \frac{P_0}{n}$ 和 $1 \leq k \leq n-1$, 所以 $k < \frac{P_0}{a} - 1 < \frac{P_0}{a} - \frac{1}{2}$, 则有 $k < \gamma_5$ 。又因为 $\gamma_5 < \gamma_2$, 因此 $\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} -$

$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{P_0}{a} \right)^2 - \frac{A}{a}} < k < \frac{P_0}{a} - \frac{1}{2}$, 即有 $\gamma_1 < k < \gamma_5$ 。

同理由 $v_2 > 0$ 可得 $k^2 - \left(2n+1 - \frac{2P_0}{a} \right) k + \left(n^2 + n - \frac{2nP_0}{a} + \frac{B}{a} \right) < 0$, 即 $n + \frac{1}{2} - \frac{P_0}{a} - \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{B}{a}} < k < n + \frac{1}{2} - \frac{P_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{P_0}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{B}{a}}$, 所以 $\gamma_3 < k < \gamma_4$ 。

因为 $1 \leq k \leq n-1$ 且 $n < \frac{P_0}{a}$, 可知 $k + \frac{P_0}{a} - n - \frac{1}{2} > 0$, 即有 $\gamma_6 < k$ 。又因为 $\gamma_3 < \gamma_6$, 可得 $\gamma_6 < k < \gamma_4$ 。从而有 $\gamma_1 < k < \gamma_5$ 且 $\gamma_6 < k < \gamma_4$ 成立。

因为 $1 \leq k \leq n-1$ 且 k 是整数, 所以令 $\eta_{l1} = \lfloor \gamma_1 \rfloor + 1, \eta_{l2} = \lfloor \gamma_6 \rfloor + 1, \eta_{m1} = \lceil \gamma_5 \rceil - 1, \eta_{m2} = \lceil \gamma_4 \rceil - 1, \eta_l = \max\{\eta_{l1}, \eta_{l2}\}, \eta_m = \min\{\eta_{m1}, \eta_{m2}\}$ 。由 $\gamma_1, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ 的表达式可知 $0 \leq \gamma_1 < n-1, 1 \leq \gamma_4 < n, 1 \leq \gamma_5 < n, 1 \leq \gamma_6 < n, n \geq 2$, 所以 $1 \leq \eta_l \leq n-1, 1 \leq \eta_m \leq n-1$ 。

故问题 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 有正整数解 k 的充要条件是 $\eta_l \leq \eta_m$ 。

证毕

引理 4 在(4),(6)式成立的条件下,问题 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 的最优解一定在闭区间 $[\eta_l, \eta_m]$ 上。

此引理的证明过程类似于引理 2 的证明过程。

下面给出定理 2,它类似于定理 1。如果 $\lambda_2 \in [\eta_l, \eta_m]$,那么得到 λ_2 是 $v_1(x) \cdot v_2(x)$ 在闭区间 $[\eta_l, \eta_m]$ 上唯一的极值点且也是 $v_1(x) \cdot v_2(x)$ 的最大值点。

定理 2 在(6)式成立时,问题 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 的最优解 k^* 存在,且 $k^* = \lfloor \lambda_2 \rfloor$ 或 $k^* = \lceil \lambda_2 \rceil$ 。最优解 k^* 具体如下:

1) 若 $\lceil \lambda_2 \rceil \in [\eta_l, \eta_m]$ 且 $\lfloor \lambda_2 \rfloor \notin [\eta_l, \eta_m]$,则 $k^* = \lceil \lambda_2 \rceil$;

2) 若 $\lfloor \lambda_2 \rfloor \in [\eta_l, \eta_m]$ 且 $\lceil \lambda_2 \rceil \notin [\eta_l, \eta_m]$,则 $k^* = \lfloor \lambda_2 \rfloor$;

3) 若 $\lceil \lambda_2 \rceil \in [\eta_l, \eta_m]$ 且 $\lfloor \lambda_2 \rfloor \in [\eta_l, \eta_m]$,则:i) 当 $v_1(\lfloor \lambda_2 \rfloor) \cdot v_2(\lfloor \lambda_2 \rfloor) \leq v_1(\lceil \lambda_2 \rceil) \cdot v_2(\lceil \lambda_2 \rceil)$ 时, $k^* = \lceil \lambda_2 \rceil$; ii) 当 $v_1(\lfloor \lambda_2 \rfloor) \cdot v_2(\lfloor \lambda_2 \rfloor) \geq v_1(\lceil \lambda_2 \rceil) \cdot v_2(\lceil \lambda_2 \rceil)$ 时, $k^* = \lfloor \lambda_2 \rfloor$ 。

4 结论

本文将老化效应和学习效应引入到排序博弈问题中,两个人共同合作竞争加工一批工件,目标函数是这两个人的合作收益乘积的最大值。文中证明了具有老化效应的问题 $G2 | p_j = P_0 + ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 和具有学习效应的问题 $G2 | p_j = P_0 - ar | v_1 v_2 / C_{\max}$ 都是多项式可解的,并给出了问题的一些性质以及问题有正整数解的充要条件。

通过本文的研究,还可以找到其他几个可以继续深入研究的方向。其中一个研究方向是可以进一步探讨其他的目标函数,例如最小化最大延误、加权总完工时间、加权总延误,等等。

参考文献:

- [1] BACHMAN A, JANI AK A. Scheduling jobs with position-dependent processing times[J]. Journal of the Operational Research Society, 2004, 55: 257-264.
- [2] CHOI J Y. Minimizing total weighted completion time under makespan constraint for two-agent scheduling with job-dependent aging effects[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 83: 237-243.
- [3] KIM D G, CHOI J Y. Sum-of-processing-times-based two-agent single-machine scheduling with aging effects and tardiness[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015: 768148.
- [4] 刘春来, 王建军. 具有退化工件和老化效应的单机可拒绝排序问题[J]. 运筹与管理, 2017, 26(6): 95-101.
LIU C L, WANG J J. Single-machine scheduling with deteriorating jobs, aging effect and rejection[J]. Operations Research and Management Science, 2017, 26(6): 95-101.
- [5] CHENG M B, XIAO S X, LUO R F, et al. Single-machine scheduling problems with a batch-dependent aging effects and variable maintenance activities[J]. International Journal of Production Research, 2018, 56(23): 7051-7063.
- [6] 刘春来, 王建军, 赵传立. 具有学习效应的平行机排序问题[J]. 系统管理学报, 2014, 23(1): 144-148.
LIU C L, WANG J J, ZHAO C L. Parallel machine scheduling with learning effects[J]. Journal of Systems & Management, 2014, 23(1): 144-148.
- [7] SHIAU Y R, TSAI M S, LEE W C, et al. Two-agent two-machine flowshop scheduling with learning effects to minimize the total completion time[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 87: 580-589.
- [8] WU W H, YIN Y Q, CHENG T C E, et al. A combined approach for two-agent scheduling with sum-of-processing-times-based learning effect[J]. Journal of the Operational Research Society, 2017, 68(2): 111-120.
- [9] 闫萍, 王吉波, 赵礼强. 带准备时间的单机指数时间学习效应排序问题[J]. 运筹与管理, 2017, 26(11): 70-75.
YAN P, WANG J B, ZHAO L Q. Single-machine exponentially time-dependent learning effect scheduling problem with release time[J]. Operations Research and Management Science, 2017, 26(11): 70-75.
- [10] 郭苗苗, 刘桓, 王吉波, 等. 具有学习效应和加工时间可控的平行机排序问题[J]. 运筹与管理, 2018, 27(3): 113-117.
GUO M M, LIU H, WANG J B, et al. Parallel machines scheduling with learning effect and controllable processing time[J]. Operations Research and Management Science, 2018, 27(3): 113-117.
- [11] LIU S C, DUAN J H, LIN W C, et al. Branch-and-bound algorithm for two-agent Scheduling with learning effect and late work criterion[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2018, 35(5): 1850037.
- [12] 唐国春, 樊保强, 刘丽丽. 排序博弈的分类、进展和展望[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2014, 31(1): 6-14.
TANG G C, FAN B Q, LIU L L. Classifications, advances and prospects of scheduling games[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2014, 31(1): 6-14.

- [13] 金霁,顾燕红,唐国春. 最大完工时间排序的两人合作博弈[J]. 上海第二工业大学学报, 2011, 28(1): 14-17.
JIN J, GU Y H, TANG G C. Two-person cooperative games on makespan scheduling[J]. Journal of Shanghai Second Polytechnic University, 2011, 28(1): 14-17.
- [14] 窦文卿,顾燕红,唐国春. 总完工时间排序两人合作博弈的纳什博弈解[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, 29(5): 1-5.
DOU W Q, GU Y H, TANG G C. The Nash bargaining solution(s) of two-person cooperative games on total completion time scheduling[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2012, 29(5): 1-5.
- [15] GU Y H, FAN J, TANG G C, et al. Maximun latency scheduling problem on two-person cooperative games[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2013, 26(1): 71-81.
- [16] LIU L L, TANG G C, FAN B Q, et al. Two-person cooperative games on scheduling problems in outpatient pharmacy dispensing process[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2015, 30: 938-948.
- [17] LIU P, WANG X L. Maximum lateness scheduling on two-person cooperative games with variable processing times and common due date[J]. Journal of Optimization, 2017, 2017: 7150637.

Operations Research and Cybernetics

Makespan Scheduling on Two-Person Cooperative Games with Position-Dependent Processing Times

LIU Peng, WANG Xiaoli

(School of Management, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

Abstract: [Purposes] Two-person cooperative games on scheduling problem with position-dependent processing times are considered.

[Methods] The job position-dependent processing time is described by an increasing or a decreasing function dependent on the position of a job in the sequence. Two persons have to cooperate in order to process a set of jobs. Each of them has a single machine and his processing cost is defined as the minimum value of makespan. The objective is to maximize the multiplication of their rational positive cooperative profits. A division of those jobs should be negotiated to yield a reasonable cooperative profit allocation scheme acceptable to them. [Findings] The sufficient and necessary conditions for the problems of positive integer solution are proposed.

[Conclusions] It is shown that the problem is polynomial-time solvable.

Keywords: scheduling; cooperative games; aging effect; learning effect

(责任编辑 黄颖)

工件可外包的单机准时排序问题*

李寒雪, 樊保强, 陈继文, 郭志佳, 杨燕英, 李欣

(鲁东大学 数学与统计科学学院, 山东 烟台 264000)

摘要:【目的】研究一类单机准时排序问题,其中工件有公共的交货期和交货截止期,允许工件外包加工,外包加工将产生外包费用,目标是极小化总提前时间,总延迟时间与总外包费用之和。【方法】首先给出该问题的若干最优性性质,然后对于交货期和交货截止期都待定,以及给定交货截止期两种情形分别讨论。【结果】对于第一种情形,设计了多项式时间算法,对于第二种情形,证明了它是NP-困难的并设计了伪多项式时间的动态规划算法。【结论】所讨论的单机准时排序问题所得到的结果为冷鲜食品生产管理者提供了有效决策支持。

关键词:准时排序;动态规划;外包费用;算法

中图分类号:O223

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)06-0015-07

1 研究背景

客户服务水平和生产成本控制问题是制造行业中普遍存在的问题,特别是在冷鲜肉加工行业中,由于产品的易逝性,即维持产品品质的周期短且销售周期也短,导致在生产和配送等供应链的各个阶段,对于产品时效性有更高的要求。另一方面,由于市场需求在时间上的高度一致性,导致一些企业不得不考虑外包加工客户工件,来提高客户服务水平。本文考虑一类来源于冷鲜肉加工业的工件可外包的单机准时排序问题,工件有公共的交货期和交货截止期,所有工件必须在交货截止期前加工完毕,允许工件外包加工,外包加工将产生外包费用。目标是确定外包工件集合,对于没有外包的工件给定加工顺序,使得总提前时间、总延误时间和总外包费用的加权和最小。

Emmons^[1]最早研究了总延误问题。Lawler^[2]给出了总延误问题一个运行时间为 $O\left(n^4 \sum p_i\right)$ 的伪多项式时间算法。基于该算法 Lawler^[3]设计了一个 FPTAS 近似方案。Du 等人^[4]证明了总延误问题是 NP-困难的。对于加权总延误问题,Lestra 等人^[5]证明该问题是强 NP-困难的。对于有公共交货期的加权总延误问题,Lawler 等人^[6]给出了一个时间为 $O(n^2 d)$ 的伪多项式时间算法,直到1992年,Yuan^[7]证明了该问题是 NP-困难的。关于极小化总提前和总延误之和的准时排序问题,Hall 等人^[8]证明了它是 NP-困难的,并给出了一个时间为 $O\left(n \sum p_i\right)$ 的伪多项式时间算法。

Chen 等人^[9]较早研究了工件课外包的排序问题,其中每个工件可以在制造商机器上加工,又可以转包给若干承包商之一进行加工,目标是在保证工件最大完工时间不超过给定值的情况下,极小化加工与转包费用和。Chen 等人^[10]研究了单机工件可转包排序,目标是极小化排序目标(最大完工时间或误工工件数)与加工、转包费用和。Chen 等人^[11]研究了 m 台平行机环境下的外包排序问题,考虑了外包费用、运输延迟以及运输费用。工件可拒绝排序是一类与工件可外包排序类似的排序问题。Bartal 等人^[12]首先研究了工件可拒绝平行机排序,目

* 收稿日期:2019-01-30 修回日期:2019-10-26 网络出版时间:2019-11-25 10:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11801251)

第一作者简介:李寒雪,女,研究方向为排序论,E-mail:1049975558@qq.com;通信作者:樊保强,男,副教授,博士,E-mail:baoliangfan@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.016.html>

标是极小化最大工件完工时间与总拒绝费用之和。对于工件可拒绝单机排序,当目标是极小化总加权完工时间与总拒绝费用之和时,Engels 等人^[13]考虑了证明该问题是 NP-困难的,并给出了一个 FPTAS 算法,对于工件权重恒等情形,给出了多项式时间算法。对于工件有就绪时间,极小化最大工件完工时间与总拒绝费用之和问题,Zhang 等人^[14]证明了该问题是 NP-难的,给出了两个伪多项式时间算法,一个 2-近似算法和一个 FPTAS 算法。

本文考虑工件可外包,目标是极小化总提前、总延误和总外包费用的加权和的单机准时排序问题。第二节将给出问题的详细描述以及常用符号。第三节对于共同交货期和交货截止期的不同情形,分别讨论了它们的计算复杂性,给出了基于动态规划的有效算法。第四节是本文结论部分。

2 问题与符号

有 n 个工件 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 将在一台机器上加工,每个工件有一个加工时间 p_i ,如果该工件不安排加工,则将外包给其他厂商加工,外包费用为 q_i 。所有工件有一个公共交货期 d ,一个最后交货期限 \bar{d} ,有 $d < \bar{d}$ 。令 A 表示接受加工的工件集合, \bar{A} 表示外包工件集合,则 $A \cup \bar{A} = N$ 。 σ 表示 A 中工件的一个排序。本文将用到以下符号: $C_i(\sigma)$ 表示工件 J_i 在排序 σ 中的完工时间,简记为 C_i ; $E_i(\sigma)$ 表示 J_i 的提前时间, $E_i(\sigma) = \max\{0, d - C_i(\sigma)\}$,简记为 E_i ; $T_i(\sigma)$ 表示 J_i 的延误时间, $T_i(\sigma) = \max\{0, C_i(\sigma) - d\}$,简记为 T_i ; $\sum_{i \in A} E_i$ 表示 A 中工件的总提前时间; $\sum_{i \in A} T_i$ 表示 A 中工件的总延误时间; $\sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 表示 \bar{A} 中工件的总外包费用。

问题是确定外包的工件集合 \bar{A} ,即确定加工的工件集合 A ,并给出 A 中工件的加工顺序,使总提前时间、总延误时间和总外包费用之和最小。该问题记为 $1|d, \bar{d}|\alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$,其中 α 和 β 分别表示所有接受工件和外包工件的权重。假设工件加工过程不允许中断,并且以上数据均为整数。

3 问题 $1|d, \bar{d}|\alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$

本节讨论问题 $1|d, \bar{d}|\alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 。对于 d 和 \bar{d} 都待定的情形,设计多项式时间算法;对于给定 \bar{d} 的情形,证明该问题是 NP-困难的,最后设计了伪多项式时间的动态规划算法。

对于经典准时排序问题 $1|d_i = d|\sum E_i + \sum T_i$,唐国春等人^[15]给出了若干最优解性质。对于 $1|d, \bar{d}|\alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$,下面将给出类似的性质,在此之前先给出关键工件 J_k 的定义。

定义 1 设 σ 是 A 中工件的一个排序,如果存在工件 J_k ,有 $C_k - p_k < d < C_k$,则称工件 J_k 为排序 σ 的关键工件。

注 对于 A 中工件的一可行排序,如果有工件在 d 时刻完工,那么该排序不存在关键工件。

引理 1 对于问题 $1|d, \bar{d}|\alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$,存在最优解满足下列条件:

- 1) 接受加工工件集合 A 中任意两个工件之间,机器无空闲。
- 2) 交货期 d 前(包括时刻)完工的工件是按 LPT 序加工,交货期 c 之后开始加工的工件是按 SPT 序加工。

根据引理 1,接受加工的工件集合 A 被分成了 3 部分,令 S_1 表示在 d 之前(包括时刻)完工的工件集合, S_2 表示在 d 之后(包括 d 时刻)开始加工的工件集合,关键工件 J_k (如果存在)在 d 之前开始加工, d 之后完工。这里 $S_1 \subseteq A, S_2 \subseteq A, A = S_1 \cup S_2 \cup \{k\}$,并且 S_1 中的工件按 LPT 序加工, S_2 中的工件按 SPT 序加工。称满足引理 1 条件的可行解 $\sigma = (S_1, J_k, S_2)$ 为 V-型解。下文只考虑 V-型可行解。

3.1 d 和 \bar{d} 待定的情形

当共同交货期 d 待定时,问题 $1|d, \bar{d}|\alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 有下面关键的最优解性质。

引理 2 对于问题 $1|d, \bar{d}|\alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$,当共同交货期 d 待定时,存在 V-型最优解,其中不存在

关键工件,即 S_1 的完工时间为 d 。

首先,根据加工时间给工件进行编号,使 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ 。由引理 2,令 $f_i(n_1, n_2)$ 表示前 i 个工件的最优 V-型解的目标值,其中:1) 所有接受加工的工件由 S_1 和 S_2 组成;2) n_1 为 S_1 中包含的工件个数, n_2 为 S_2 中包含的工件个数。记 $f_i(n_1, n_2)$ 对应 i 阶段的状态变量为 (i, n_1, n_2) 。则状态 (i, n_1, n_2) 是在 $i-1$ 阶段的状态 (i', n'_1, n'_2) 基础上,通过对工件 J_i 执行以下某个决策得到:

1) $i \in A, i \in S_1$, 即把 J_i 放在 d 之前加工。因为 S_1 中的工件按 LPT 顺序加工,所以 J_i 为 S_1 中最后一个加工的工件,因此 $C_i = d$ 。由此产生的费用是 $\alpha(n_1 - 1)p_i$ 。

2) $i \in A, i \in S_2$, 即把 J_i 放在 d 之后加工。因为 S_2 中的工件为 SPT 序,所以 J_i 为 S_2 中第一个加工的工件,因此 $C_i = d + p_i$ 。由此产生的费用是 $\alpha n_2 p_i$ 。

3) $i \in \bar{A}$, 即工件 J_i 外包加工。因此产生的费用是 βq_i 。

根据以上分析,下面给出问题 $1 | d, \bar{d} | \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 的动态规划算法。

算法 DP1 初始条件: $f_0(n_1, n_2) = \begin{cases} 0, n_1 = n_2 = 0 \\ \infty, \text{其他} \end{cases}$;

迭代方程:对于 $i=1, 2, \dots, n$, 有 $f_i(n_1, n_2) = \min \begin{cases} \alpha(n_1 - 1)p_i + f_{i-1}(n_1 - 1, n_2) \\ \alpha n_2 p_i + f_{i-1}(n_1, n_2 - 1) \\ \beta q_i + f_{i-1}(n_1, n_2) \end{cases}$;

最优值: $\min\{f_n(n_1, n_2) | 0 \leq n_1, n_2 \leq n\}$ 。

动态规划 DP1 共有 n 个阶段。因为 $n_1 \leq n, n_2 \leq n$, 所以每个阶段的运行时间不超过 $O(n^2)$ 。那么 DP1 的时间复杂度为 $O(n^3)$ 。通过回溯法可以得到最优解。那么 $d = \sum_{i \in S_1} p_i$ 和 $\bar{d} = \sum_{i \in A} p_i$ 。

定理 1 当 d 和 \bar{d} 待定时,问题 $1 | d, \bar{d} | \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 可以由 DP1 在 $O(n^3)$ 时间内给出最优解。

3.2 \bar{d} 给定的情形

本节对于 \bar{d} 给定的情形,证明了问题 $1 | d, \bar{d} | \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 是 NP-困难问题,然后就 d 是否待定分别设计了伪多项式时间的动态规划算法。

定理 2 问题 $1 | d, \bar{d} | \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 是 NP-困难的。

证明 把 NP-困难的背包问题^[16]变换到问题 $1 | d, \bar{d} | \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 的一个特殊情形: $\alpha=0, \beta=1$ 。

令 $\sum_{i \in A} p_i$ 表示接受工件的总加工时间, $\sum_{i \in A} q_i = \sum_{i \in N} q_i - \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 。因此该情形等价于在 $\sum_{i \in A} p_i \leq \bar{d}$ 的约束下,极大化 $\sum_{i \in A} q_i$ 的优化问题。显然该问题等价于背包问题,因此是 NP-困难的。 证毕

下面给出 d 待定时, $1 | d, \bar{d} | \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 的伪多项式时间动态规划算法。

由引理 2, S_1 中的工件在时刻 d 完工。类似于算法 DP1 中的定义,令 $f_i(n_1, n_2, t)$ 表示前 i 个工件的最优 V-型解的目标值,其中 n_1 为 S_1 中包含的工件个数, n_2 为 S_2 中包含的工件个数; t 表示 A 中所有工件的加工时间和 $t = \sum_{i \in A} p_i$ 。

算法 DP2 初始条件: $f_0(n_1, n_2, t) = \begin{cases} 0, n_1 = n_2 = t = 0 \\ \infty, \text{其他} \end{cases}$;

迭代方程:对于 $i=1, 2, \dots, n$, 有:

$f_i(n_1, n_2, t) = \min \begin{cases} \alpha(n_1 - 1)p_i + f_{i-1}(n_1 - 1, n_2, t - p_i), t \leq \bar{d} \\ \alpha n_2 p_i + f_{i-1}(n_1, n_2 - 1, t - p_i), t \leq \bar{d} \\ \beta q_i + f_{i-1}(n_1, n_2, t) \end{cases}$;

最优值: $\min\{f_n(n_1, n_2, t) \mid 0 \leq n_1, n_2 \leq n, 0 \leq t \leq \sum p_i\}$ 。

动态规划 DP2 共有 n 个阶段。因为 $n_1 \leq n, n_2 \leq n, t \leq \sum p_i$, 所以每个阶段的运行时间不超过 $O(n^2 \sum p_i)$ 。

那么 DP2 的时间复杂度为 $O(n^3 \sum p_i)$ 。通过回溯法可以得到最优解, 则有 $d = \sum_{i \in S_1} p_i$ 。

定理 3 当 d 待定时, $1 \mid d, \bar{d} \mid \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 可以由 DP2 在 $O(n^3 \sum p_i)$ 时间内给出最优解。

现在考虑 d 给定的情形。首先给出 $1 \mid d, \bar{d} \mid \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 的一些最优解性质。

引理 3 对于问题 $1 \mid d, \bar{d} \mid \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$, 当共同交货期 d 和截止日期 \bar{d} 给定时, 存在 V-型最优解 $\sigma = (S_1, J_k, S_2)$, 满足下列条件之一: 1) 关键工件 J_k 不存在, 即 S_1 中的工件在 d 时刻完工; 2) $d < C_k < d + p_k$, S_1 在 0 时刻开始加工; 3) $d < C_k < d + p_k$, S_2 在 \bar{d} 时刻完工。

关于引理 3 中的关键工件 J_k 有下面的结论。

引理 4 满足引理 3 中条件的关键工件 J_k , 如果 $d < C_k < d + p_k$, 则 $p_k \leq \min\{p_i \mid i \in S_1\}$ 或 $p_k \leq \min\{p_i \mid i \in S_2\}$ 。

证明 设 $\sigma = (S_1, J_k, S_2)$ 是一最优 V-型解。不失一般性, 设 $p_r = \min\{p_i \mid i \in S_1\}$, $r \in N$, $p_h = \min\{p_i \mid i \in S_2\}$, $h \in N$ 。由引理 1 知, 在 σ 中 J_r 是 J_k 紧前工件, J_h 是 J_k 紧后工件。下面用反证法来证明该引理结论。

假设 $p_k > \min\{p_i \mid i \in S_1\}$ 且 $p_k > \min\{p_i \mid i \in S_2\}$ 。注意到时刻 d 将 J_k 分为两部分, d 时刻之前记为 $p_{k,1}$, d 之后记为 $p_{k,2}$ 。下面按 $p_{k,1}$ 和 $p_{k,2}$ 的大小关系分两种情况讨论。

1) $p_{k,2} \geq p_{k,1}$ 。

i) 若 $p_{k,1} \geq p_h$, 则交换 p_k 与 p_h , 得到一新排序, 它的目标函数值将减小 $p_{k,2} - p_{k,1} + p_h$ 。显然 $p_{k,2} - p_{k,1} + p_h > 0$, 此结论与 σ 为最优解矛盾。

ii) 若 $p_{k,1} < p_h$, 则交换 p_k 与 p_h , 得到一新排序, 它的目标值将减小 $p_k - p_h$ 。因为 $p_k > p_h$, 所以 $p_k - p_h > 0$ 与 σ 为最优解矛盾。

2) $p_{k,2} < p_{k,1}$ 。

i) 若 $p_{k,1} \geq p_r$, 则交换 p_k 与 p_r , 得到一新排序, 它的目标值将减小 $p_{k,1} - p_{k,2} + p_r$ 。易知 $p_{k,1} - p_{k,2} + p_r > 0$, 此结论与 σ 为最优解矛盾。

ii) 若 $p_{k,1} < p_r$, 则交换 p_k 与 p_r , 得到一新排序, 它的目标值将减小 $p_k - p_r$, 因为 $p_k > p_r$, 所以 $p_k - p_r > 0$ 与 σ 为最优解矛盾。

综上所述, 假设不成立, 因此有 $p_k \leq \min\{p_i \mid i \in S_1\}$ 或 $p_k \leq \min\{p_i \mid i \in S_2\}$ 。

证毕

下面对引理 3 中的 3 种情形分别进行讨论。

情形 1 关键工件 J_k 不存在, 即 S_1 中的工件在时刻 d 完工。

根据工件加工时间给工件进行编号, 使 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ 。

令 $f_i(t_1, t_2)$ 表示前 i 个工件的最优 V-型解的目标值, 其中 t_1 为 S_1 中工件总加工时间, 即 $t_1 = \sum_{i \in S_1} p_i$; t_2 为

S_2 中工件总加工时间, 即 $t_2 = \sum_{j \in S_2} p_j$ 。 $f_i(t_1, t_2)$ 对应 i 阶段的状态 (i, t_1, t_2) 。则状态 (i, t_1, t_2) 是在 $i-1$ 阶段的

状态 (i', t'_1, t'_2) 基础上, 通过对工件 J_i 执行以下某个决策得到:

1) $i \in A, i \in S_1, t_1 \leq d$ 。因为 S_1 中的工件按 LPT 顺序加工, 所以 J_i 为 S_1 中第一个加工的工件, 对其他工件的完工时间没有影响, 由此产生的费用是 $\alpha(t_1 - p_i)$ 。

2) $i \in A, i \in S_2, t_2 \leq \bar{d} - d$ 。因为 S_2 中的工件为 SPT 序, 所以 J_i 为 S_2 中最后一个加工的工件, 对其他工件的完工时间也没有影响。由此产生的费用是 αt_2 。

3) $i \in \bar{A}$, 即工件 J_i 外包加工。因此产生的费用是 βq_i 。

根据以上分析,下面给出情形 1 的动态规划算法。

算法 DP3 初始条件: $f_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 0, t_1 = t_2 = 0 \\ \infty, \text{其他} \end{cases}$;

迭代方程:对于 $i=1, 2, \dots, n$, 有:

$$f_i(t_1, t_2) = \min \begin{cases} \alpha(t_1 - p_i) + f_{i-1}(t_1 - p_i, t_2), t_1 \leq d \\ \alpha t_2 + f_{i-1}(t_1, t_2 - p_i), t_2 \leq \bar{d} - d \\ \beta q_i + f_{i-1}(t_1, t_2) \end{cases} ;$$

最优值: $\min\{f_n(t_1, t_2) \mid 0 \leq t_1, t_2 \leq \sum p_i\}$ 。

动态规划 DP3 共有 n 个阶段。因为 $t_1 \leq \sum p_i, t_2 \leq \sum p_i$, 所以第 i 阶段运行时间不超过 $O\left(\left(\sum p_i\right)^2\right)$ 。

因此, DP3 的时间复杂度为 $O\left(n\left(\sum p_i\right)^2\right)$ 。

定理 4 对于不存在关键工件的情形, $1 \mid d, \bar{d} \mid \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 可以由 DP3 在 $O\left(n\left(\sum p_i\right)^2\right)$ 时间内给出最优解。

情形 2 $d < C_k < d + p_k$, 且 S_1 在 0 时刻开始加工。

考虑 V-型可行解 $\sigma = (S_1, J_k, S_2)$ 。由引理 4, 如果 $p_k \leq \min\{p_i \mid i \in S_1\}$, 则令 $S'_1 = S_1 \cup \{k\}, S'_2 = S_2$ 。若 $p_k \leq \min\{p_i \mid i \in S_2\}$, 则令 $S'_1 = S_1, S'_2 = S_2 \cup \{k\}$ 。令 $d' = d + s$ 为 S'_2 的开始加工时间, 这里 $0 < |s| \leq p_{\max}, p_{\max} = \max\{p_i \mid i \in N\}$ 。则 S'_1 表示在 d' 之前包括在 d' 时刻完工的工件集合, S'_2 表示在 d' 之后包括在 d' 时刻开始加工的工件集合。

下面对于给定的 s , 令 $d' = d + s, f'_i(t_1, t_2)$ 表示前 i 个工件的最优 V-型解的目标值。调用算法 DP3, 在执行 DP3 过程中, d' 替换 d , 并分别记录 S'_1 和 S'_2 中的工件个数 n_1 和 n_2 。则有:

$$f'_i(t_1, t_2) = \begin{cases} f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1 + 2)s, s > 0 \\ f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1)s, s < 0 \end{cases} .$$

此时, 情形 2 的最优值是 $\min\{f'_n(t_1, t_2) \mid t_1 = d + s, 0 \leq t_2 \leq \sum p_i, 0 < |s| \leq p_{\max}\}$ 。

情形 3 $d < C_k < d + p_k$, 且 S_2 在 \bar{d} 时刻完工。

考虑 V-型可行解 $\sigma = (S_1, J_k, S_2)$ 。类似于情形 2 的讨论, 定义 S'_1, S'_2 。令 $d' = d + l$ 为 S'_1 的完工时间, $0 < |l| \leq p_{\max}$ 。则 S'_1 表示在 d' 之前包括在 d' 时刻完工的工件集合, S'_2 表示在 d' 之后包括在 d' 时刻开始加工的工件集合。

下面对于给定的 l , 令 $d' = d + l, f'_i(t_1, t_2)$ 表示前 i 个工件的最优 V-型解的目标值。调用算法 DP3, 在执行 DP3 过程中, d' 替换 d , 并分别记录 S'_1 和 S'_2 中的工件个数 n_1 和 n_2 。则有:

$$f'_i(t_1, t_2) = \begin{cases} f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1 + 2)l, l > 0 \\ f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1)l, l < 0 \end{cases} .$$

此时, 情形 3 的最优值是 $\min\{f'_n(t_1, t_2) \mid t_2 = \bar{d} - (d + l), 0 \leq t_1 \leq \sum p_i, 0 < |l| \leq p_{\max}\}$ 。

综上所述, 现给出问题 $1 \mid d, \bar{d} \mid \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in \bar{A}} q_i$ 在 d 和 \bar{d} 给定时的有效算法。

算法 1 第 1 步: 根据工件加工时间给工件进行编号, 使 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ 。

第 2 步: 调用算法 DP3, 得到排序 σ_1 。

第 3 步: 对于给定的 $s(0 < |s| \leq p_{\max})$, 针对新的交货期 $d' = d + s$, 调用算法 DP3, 在执行 DP3 过程中, 记录 S'_1 和 S'_2 的工件个数分别为 n_1 和 n_2 , 令:

$$f'_i(t_1, t_2) = \begin{cases} f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1 + 2)s, s > 0 \\ f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1)s, s < 0 \end{cases}$$

得到排序 σ_2 ,使得 σ_2 的目标函数值为 $\min\{f_n^s(t_1, t_2) \mid t_1 = d + s, 0 \leq t_2 \leq \sum p_i, 0 < |s| \leq p_{\max}\}$ 。

第 4 步:对于给定的 $l(0 < |l| \leq p_{\max})$,这对新的交货期 $d' = d + l$,调用算法 DP3,在执行 DP3 过程中,记录 S'_1 和 S'_2 的工件个数分别为 n_1 和 n_2 ,令:

$$f_i^l(t_1, t_2) = \begin{cases} f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1 + 2)l, l > 0 \\ f_i(t_1, t_2) + (n_2 - n_1)l, l < 0 \end{cases}$$

得到排序 σ_3 ,使得 σ_3 的目标函数值为 $\min\{f_n^l(t_1, t_2) \mid t_2 = \bar{d} - (d + l), 0 \leq t_1 \leq \sum p_i, 0 < |l| \leq p_{\max}\}$ 。

第 5 步:记 σ_1, σ_2 和 σ_3 中目标函数值最小的排序为 σ 。

算法 1 的时间复杂度为 $O\left(n\left(\sum p_i\right)^2 p_{\max}\right)$ 。

定理 5 当 d 和 \bar{d} 给定时, $1|d, \bar{d}| \alpha \sum_{i \in A} (E_i + T_i) + \beta \sum_{i \in A} q_i$ 可以由算法 1 在 $O\left(n\left(\sum p_i\right)^2 p_{\max}\right)$ 时间内给出最优解。

下面通过例子对算法 1 进行验证。

首先,令 $\alpha = 1, \beta = 1, d = 10, \bar{d} = 17$,工件集合 $N = \{1, 2, 3, 4\}$,参数见表 1。

首先根据工件加工时间从小到大的顺序给工件进行编号为 n_2, n_4, n_3, n_1 。如果一一计算,版面过于大,现只呈现一部分计算过程及结果(每次都选取将工件放在交货期之前的位置进行计算)。

$$f_0(0,0) = 0, f_1(t_1, t_2) = \min \begin{cases} f_1(2,0) = 0 \\ f_1(0,2) = 2 \\ f_1(0,0) = 1 \end{cases}, f_2(t_1, t_2) = \min \begin{cases} f_2(7,0) = 2 \\ f_2(2,5) = 5 \\ f_2(2,0) = 2 \end{cases}$$

$$f_3(t_1, t_2) = \min \begin{cases} f_3(13,0) = 7 \\ f_3(7,6) = 8 \\ f_3(7,0) = 6 \end{cases}, f_4(t_1, t_2) = \min \begin{cases} f_4(21,0) = 13 \\ f_4(13,8) = 15 \\ f_4(13,0) = 13 \end{cases}$$

参数类别	取值			
n_i	1	2	3	4
p_i	8	2	6	5
q_i	6	1	4	2

同理可得其他结果,最终排序工件 n_2, n_3, n_4 外包,而工件 n_1 在机器上加工。因此,极小化总提前时间,总延迟时间与总外包费用之和为 7。

4 结论

本文研究了工件可外包的单机准时排序问题,目标是确定外包工件集合,对于没有外包的工件给定加工顺序,使得总提前时间、总延误时间和总外包费用的加权和最小。对于 d 和 \bar{d} 都待定的情形,设计了多项式时间算法;对于给定 \bar{d} 的情形,证明该问题是 NP-困难的,最后针对一般情形设计了两个伪多项式时间的动态规划算法。对于该问题,今后可以在以下几个方面进行深入研究:

- 1) 既然该问题是 NP-困难的,可以考虑设计有效的基于连续优化技术的近似算法;
- 2) 考虑其他目标函数,例如,误工工件数和总外包费用的加权和等;
- 3) 对于 d 和 \bar{d} 都待定的情形,将进一步研究具有可转移特征函数的排序博弈问题,为决策者制定更合理的订单加工次序,设计科学合理的分配方案,提高联盟的凝聚力,达到社会收益最大。

参考文献:

[1] EMMONS H. One-machine sequencing to minimize certain functions of job tardiness[J]. Operations Research, 1969, 17 (4): 701-715.

[2] LAWLER E L. A "pseudopolynomial" algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1977, 1(8): 331-342.

[3] LAWLER E L. A fully polynomial approximation scheme for the total tardiness problem[J]. Operations Research Letters, 1982, 1(6): 207-208.

[4] DU J Z, LEUNG J Y T. Minimizing total tardiness on one single machine is NP-hard[J]. Mathematics of Operations Research, 1990, 15(3): 483-495.

- [5] LENSTRA J K, RINNOOY KAN A H G, BRUCKER P. Complexity of machine scheduling problems[J]. *Annals of Discrete Mathematics*, 1977, 1: 343-362.
- [6] LAWLER E L, MOORE J M. A functional equation and its application to resource allocation and sequencing problems [J]. *Management Science*, 1969, 16(1): 77-84.
- [7] YUAN J J. The NP-hardness of the single machine common due date weighted tardiness problem[J]. *Systems Science and Mathematics Sciences*, 1992, 5(4): 328-333.
- [8] HALL N G, POSNER M E. Earliness-tardiness scheduling problems, I: weighted deviation of completion times about a common due date[J]. *Operations Research*, 1991, 39(5): 836-846.
- [9] CHEN Z L, LI C L. Scheduling with subcontracting options [J]. *IIE Transactions*, 2008, 40: 1171-1184.
- [10] 陈荣军, 唐国春. 单机上的排序与转包问题[J]. *应用数学学报*, 2017, 40(2): 170-178.
- CHEN R J, TANG G C. Scheduling with outsourcing on single machine[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2017, 40(2): 170-178.
- [11] CHEN L Z, YANG D, ZHANG Y Z. The outsourcing problem in supply chain scheduling [J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2013, 30(5): 21-26.
- [12] BARTAL Y, LEONARDI S, SPACCAMELA A M, et al. Multiprocessor scheduling with rejection[J]. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2000, 13(1): 64-78.
- [13] ENGELS D W, KARGER D R, KOLLIPOULDS S G, et al. Techniques for scheduling with rejection[J]. *Journal of Algorithms*, 2003, 49(1): 175-191.
- [14] ZHANG L Q, LU L F, YUAN J J. Single machine scheduling with release dates and rejection[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 198(3): 975-978.
- [15] 唐国春, 张峰, 罗收成, 等. 现代排序论[M]. 上海: 上海科学普及出版社, 2003.
- TANG G C, ZHANG F, LUO S C, et al. *Modern scheduling theory* [M]. Shanghai: Shanghai Science Popularization Publishers, 2003.
- [16] GÜNTZER M M, JUNGnickel D. Approximate minimization algorithms for the 0/1 knapsack and subset-sum problem[J]. *Operations Research Letters*, 2000, 26(2): 55-66.

Operations Research and Cybernetics

Single-Machine Just-in-Time Scheduling with Outsourcing

LI Hanxue, FAN Baoqiang, CHEN Jiwen, GUO Zhijia, YANG Yanying, LI Xin

(School of Mathematics and Statistics, Ludong University, Yantai Shandong 264000, China)

Abstract: [Purposes] Motivated by the time-sensitive production process, a single-machine just-in-time scheduling problem with outsourcing is studied. In such a problem, there is a common due date and a deadline. A job is either outsourced to process, in which case an outsourcing cost has to be paid, or processed on the machine. The objective is to minimize the sum of the total earliness, the total tardiness and the total outsourcing cost. [Methods] First, some optimality properties of the problem are given, and then the delivery deadline and delivery deadline are discussed respectively. [Findings] For the first case, the polynomial time algorithm is designed. For the second case, it is proved to be NP hard and a dynamic programming algorithm of pseudo polynomial time is designed. [Conclusions] The results of the single machine on-time scheduling problem provide effective decision support for cold and fresh food production managers.

Keywords: scheduling; dynamic programming; outsourcing; algorithm

(责任编辑 黄颖)

考虑均衡各站乘客等待时间的城市轨道交通客流协同控制模型*

甘金荣, 陈治亚

(中南大学 交通运输工程学院, 长沙 410075)

摘要:【目的】针对城市轨道交通在高峰期由于前方车站客流量需求过大,迅速占据运能而导致后方车站的乘客需等待较长时间才能乘车的问题,建立考虑均衡各站乘客等待时间的客流控制模型。【方法】首先对乘客乘车过程进行动态建模,然后建立以系统平均等待时间最小和使车站最大平均等待时间最小为目标的优化模型,通过设置权重 λ 来均衡各站的平均等待时间,当 $\lambda=0$ 时,为仅考虑均衡各站的平均等待时间,当 $\lambda=1$ 时,为仅考虑最小化系统总等待时间,在实际中,可根据目标的不同选取不同的 λ 值。【结果】由于建立的模型为整数线性规划模型,运用 CPLEX 求解器即可得到最优解;最后通过算例进行验证,结果显示通过在目标函数中设置不同的权重,可不同程度地均衡各站的平均等待时间。【结论】通过本文构建的模型,既减小了系统的总等待时间,也均衡了各站的平均等待时间。

关键词:城市轨道交通;客流协同控制;均衡;高峰期;等待时间;CPLEX

中图分类号:O223; U239.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)06-0022-09

在城市轨道交通高峰期,前方车站的乘客迅速占据运能,后方乘客需要等待较久才能乘车离开,这样往往造成车站客流的长时间堆积、等待时间过长等问题。为保障乘客在旅程中的安全及为运输组织的管理提供便利,对车站实施客流控制(即“限流”)是一种简单有效的方法。

目前针对城市轨道交通客流控制已有一定的研究,张正等人^[1]在分析流量平衡原理的基础上,提出了客流在车站、线路和线网3个层级上的协同限流方法。刘晓华等人^[2]提出了车站联合客流控制的思想。赵鹏等人^[3-4]从线路层和网络层构建客流控制模型,以提高线路的利用率和减小乘客等待时间。石俊刚等人^[5]则在考虑站厅安全的情况下,建立了地铁线路客流协同控制模型。蒋琦玮等人^[6]根据车站三级控流策略,建立车站层次的双目标客流控制模型,通过开启设备的数量来控制客流。冯树民等人^[7]针对突发大客流建立以乘客平均延误最小和各区间满载率之和最大为目标的协调限流控制优化模型。此外,Liu等人^[8]对于高频地铁线路中高峰时段的出行需求过大而给地铁系统带来的较大风险,降低了乘客舒适度等问题,提出了一种结合旅客控制策略的地铁列车调度与列车连接协同优化方法。Li等人^[9]将客流控制策略与列车调度相结合,以消除列车延误,并利用预测控制方法求解了所建立的耦合状态空间模型。Shi等人^[10]提出了一种协同优化列车时刻表和客流控制策略的整数规划模型,以最小化线路上所有车站的旅客等候时间为目标并给出了相应算法。Jiang等人^[11]研究了在给定客流总进站需求的情况下,对旅客需求进行控制和调整列车运力供给,建立了基于效用理论的客运站选择模型,对客运站之间的客流分布进行了修正。Yang等人^[12]提出了一种综合客流控制和公交桥接服务的综合策略,以缓解地铁系统拥挤的情况。Xu等人^[13]基于排队网络理论,研究了不确定需求下的客流控制组织。鲁工圆等人^[14]针对客流过饱和的地铁线路以旅客周转量最大为目标进行了客流控制。除此之外,还可采取拥挤收费缓解交通拥挤^[15]。

综上,目前关于客流控制方面的研究^[3-5,7,14]以线路上的乘客总等待时间或旅客周转量最大为目标进行优化,能一定程度上减小乘客总等待时间,但这些研究仅从线路系统的角度进行优化,并未考虑各站的平均等待

* 收稿日期:2019-05-20 修回日期:2019-10-30 网络出版时间:2019-11-25 10:34

资助项目:国家重点研发计划(No. 2017YFB1201300);中南大学研究生自主探索创新项目(No. 2018zzts512)

第一作者简介:甘金荣,女,研究方向为城市轨道交通,E-mail: ganjinrong@csu.edu.cn;通信作者:陈治亚,男,教授,博士生导师,E-mail: chzy@csu.edu.cn

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1033.010.html>

时间。而在高峰期,往往存在前方车站的客流需求过大,过早占据运能,导致后方车站乘客的等待时间过长的问題,目前的研究并不能均衡后方车站乘客的等待时间,不具现实意义。为此,本文将针对高峰期各站的平均等待时间差异较大进行均衡优化,以最小化线路各站乘客的平均等待时间和系统的平均等待时间为目标,通过计算出各个车站的上车人数,协同制定出各个车站的客流管控措施,从而达到缓解客流拥挤及均衡各站乘客等待时间的目的。

1 问题描述

由于城市规划分区,城市轨道交通客流具有较强的时空特性。考虑如图 1 所示的城市轨道单向线路,线路上各站在高峰时段客流需求如图 2 所示,可以看出,各站需求具有较大差异,前方几个车站客流需求量大,这样往往导致由于前方需求大,迅速占用运力资源,当列车运行至后方车站时,乘客无法乘车,需等待较长时间才能乘车离开。已有的研究往往从降低系统总等待时间角度考虑系统优化,并不能达到使各站的乘客等待时间减小。为此,本文以最小化线路各站乘客的平均等待时间和系统的平均等待时间为目标建立优化模型,通过计算出各个车站的上车人数,协同制定各个车站的客流管控措施。

考虑建模和计算的复杂性,本节仅考虑单一方向的城市轨道交通线路,共有 I 个车站,对于每一个车站记为 $1, \dots, 2, v, \dots, i$,其中 1 表示始发站, i 表示终点站。取单位计算时间 t_0 ,将控制时段 T 进行离散化, $t \in T$ 。列车集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ 。为简化问題,做如下假设:

- 1) 乘客站内行走时间不计,站台等待时间忽略不计。客流控制为控制进入站台的乘客,进入站台的乘客即可乘坐接下来的车,乘客行走时间、站台等待时间忽略不计。
- 2) 客流需求的 OD 比例为恒定值,不随时间改变。在通勤等高峰客流中,OD 比例具有一定的稳定性,可根据历史数据分析获得。
- 3) 在整个过程中,到达地铁的乘客不会因为等待时间过长而放弃乘坐地铁。

2 乘客动态建模

乘客乘坐地铁的过程是一个从进入车站到乘坐列车再到区间运行最后下车出站的动态转移过程,因此接下来对这个动态过程进行建模分析。

2.1 决策变量

本模型针对在高峰期各站等待时间差异较大的问題,构建考虑系统平均等待时间最小和使车站最大平均等待时间最小为目标的优化模型。模型中包含两种决策变量: $X_i(t)$ 表示时刻 t 进入站台等待乘车的乘客数, t_{\max} 表示车站平均最大等待时间。

2.2 客流需求

车站 i 时刻 t 的进站客流数为 $Y_i(t)$,各行程的旅客比例为 $e_{i,j}$ ^[16]:

$$e_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & e_{1,2} & \dots & e_{1,j} \\ 0 & 0 & \dots & e_{2,j} \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 $e_{i,j}$ 为行程是 $i \rightarrow j$ 的旅客比例。则时刻 t 行程为 $i \rightarrow j$ 的旅客数为:

$$Y_{i,j}(t) = Y_i(t) \cdot e_{i,j} \quad (2)$$

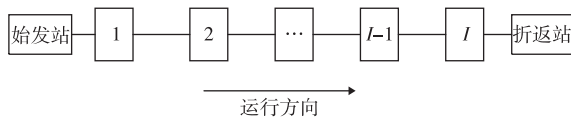


图 1 单向轨道交通线路

Fig. 1 One-way rail transit line

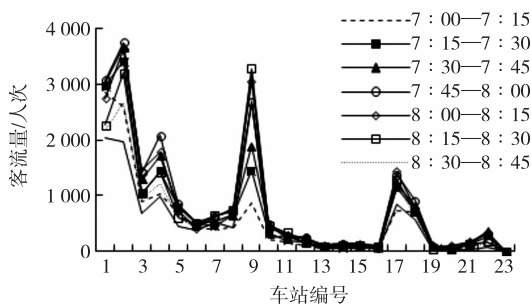


图 2 高峰期线路上各车站客流需求

Fig. 2 The passenger flow demand of each station on the rush-hour line

其中 $Y_{i,j}(t)$ 为时刻 t 行程为 $i \rightarrow j$ 的乘客数。

2.3 列车待乘状态

$V_{i,m}(t)$ 表示列车在车站 i 的状态, 为 0-1 变量, 当它的值为 1 时表示从上一列车离开至即将来临一列车的离开时段, 如图 3 所示。

2.4 站内动态客流

时段 t 内进入站台的人数为从时刻 1 至时刻 t 进入站台的人数累加:

$$L_i^p(t) = \sum_{t=1}^t X_i(t). \quad (3)$$

其中 $X_i(t)$ 为时刻 t 车站 i 进站人数, $L_i^p(t)$ 为时段 t 内进入站台 i 的人数。同理, 时段 t 内进站的人数为从时刻 1 至时刻 t 的进站人数累加:

$$L_i^a(t) = \sum_{t=1}^t Y_i(t). \quad (4)$$

其中 $Y_i(t)$ 为时刻 t 车站 i 进站人数, $L_i^a(t)$ 为时段 t 内进站的人数。时刻 t 站厅的人数为时段 t 内的进站人数与时段 t 内的进站台人数相减:

$$L_i^{wh}(t) = L_i^a(t) - L_i^p(t). \quad (5)$$

其中 $L_i^{wh}(t)$ 为时刻 t 的站厅人数。

控制时段内车站 i 的总人数为将控制时段内的人数进行累加:

$$N_{a_i} = \sum_{t \in T} Y_i(t). \quad (6)$$

其中 N_{a_i} 为车站 i 的总人数。控制时段内线路上的总人数为各站的进站人数进行累加:

$$N_a = \sum_i N_{a_i}. \quad (7)$$

其中 N_a 为线路上所有车站的总人数。列车 m 在车站 i 的上车人数为在待乘列车 m 的时段内的进入站台人数之和:

$$L_{i,m}^b = \sum_{t \in T} V_{i,m}(t) \cdot X_i(t). \quad (8)$$

其中 $L_{i,m}^b$ 为列车 m 在车站 i 的上车人数。时刻 t 车站 i 站台等待乘坐列车 m 的乘客数为:

$$L_{i,m}^{wp}(t) = \left(\sum_{t \in T} V_{i,m}(t) \cdot X_i(t) \right) \cdot V_{i,m}(t). \quad (9)$$

其中 $L_{i,m}^{wp}(t)$ 时刻 t 车站 i 站台等待乘坐列车 m 的乘客数。

2.5 乘客上下车过程

列车 m 在车站 i 主要完成乘客上下车的活动, 因此在区间 $i \rightarrow i+1$, 列车的载客量计算如下:

$$L_{i,m}^{on} = \begin{cases} L_{1,m}^b (i=1) \\ L_{i-1,m}^{on} - L_{i,m}^{al} + L_{i,m}^b (i \geq 2) \end{cases} \quad (10)$$

其中 $L_{i,m}^{on}$ 为列车 m 在离开车站 i 后车上的人数。由于在第 1 站, 即 $i=1$ 时, 车站只有上车没有下车乘客, 所以列车载客量即为上车人数; 从第 2 站开始, 列车的载客量为前一站的载客量减去本站的下车人数再加上本站的上车人数:

$$L_{i,m}^{al} = \sum_{v=1}^{i-1} n_{v,m}^b \cdot e_{v,i} (i > 1). \quad (11)$$

其中: $L_{i,m}^{al}$ 表示列车 m 在车站 $i (i > 1)$ 的下车人数, 即为列车 m 在车站 i 前方所有站上车的人数中以 i 站为目的地的所有乘客加和, $e_{v,i}$ 为 OD 比例。

2.6 乘客等待时间

由于乘客进入站台后即可乘坐即将到来的列车, 等待时间较小, 所以忽略站台等待时间, 仅计算在站台外等

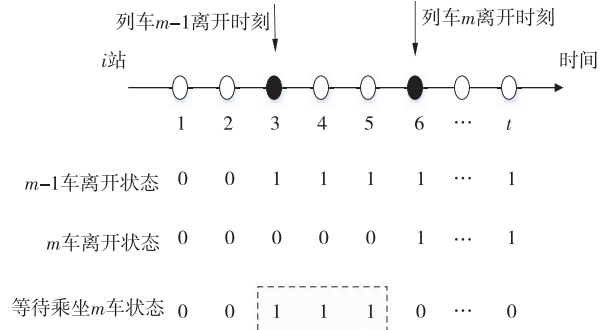


图 3 列车状态

Fig. 3 State of the train

待时间,车站 i 乘客的等待时间为各时刻的等待乘客与单位计算时间相乘的累加之和,计算公式为:

$$t_i^{\text{wh}} = \sum_{t \in T} L_i^{\text{wh}}(t) \cdot t_0. \quad (12)$$

其中: t_0 为单位计算时间, t_i^{wh} 为车站 i 乘客的等待时间。则车站 i 平均等待时间为车站 i 总等待时间除以车站 i 总人数:

$$\tilde{t}_i = \frac{t_i^{\text{wh}}}{N_{a_i}}. \quad (13)$$

其中 \tilde{t}_i 为车站 i 平均等待时间。线路总平均等待时间为所有车站等待时间的累计之和:

$$T_{\text{total}} = \sum_i t_i^{\text{wh}}. \quad (14)$$

其中 T_{total} 为线路总平均等待时间。同理,线路平均等待时间为总等待时间除以总人数:

$$\tilde{t} = \frac{T_{\text{total}}}{N_a}. \quad (15)$$

其中 \tilde{t} 为线路平均等待时间。

3 客流控制模型

3.1 目标函数

为减小乘客等待时间且均衡各站平均等待时间,建立以系统总体平均等待时间最小化和站平均最大等待时间最小化为目标的函数,即:

$$\min \tilde{T} = \lambda \tilde{t} + (1 - \lambda) t_{\max}. \quad (16)$$

其中 λ 为目标权重,当 $\lambda = 0$ 时,表示以站平均最大等待时间最小为目标,完全考虑均衡各站的等待时间;当 $\lambda = 1$ 时,表示以系统总等待时间最小为目标函数。在实际中,可根据具体情况,选取 λ 值来不同程度的均衡各站等待时间。

3.2 约束条件

乘客自进站等待乘车至上车到区间运行至到达目的地站下车出站的过程中,需要满足站内各区域、站内设施等的的能力约束,具体如下。

1) 服务人数。在控制时段内,客流需求与服务人数相同,即进站人数、进站台人数和上车人数相同,又即:

$$\sum_{t \in T} X_i(t) = \sum_{t \in T} Y_i(t) = \sum_{m \in M} L_{i,m}^b. \quad (17)$$

2) 相邻时刻进站台人数、单位时间进站人数限制。在客流控制时段内,为保证控流过程的流畅,则相邻控制时段的进站台人数相差有一个限度,即:

$$-a \leq X_i(t) - X_i(t-1) \leq a. \quad (18)$$

其中 a 为相邻时段客流相差限度。站内乘客通过各设施时有能力约束,简化表达如下:

$$X_i(t) \leq C. \quad (19)$$

其中 C 为设备能力限制。

3) 站内设施限制(站台、站厅)。高峰期客流往往较大,为保证站内安全,站内各区域有容量约束,即站台有容量限制 h_p 和站厅有容量限制 h_h ,分别计算如下:

$$L_{i,m}^b \leq h_p, \quad (20)$$

$$L_i^{\text{wh}}(t) \leq h_h. \quad (21)$$

4) 列车载客量限制。高峰期乘客的滞留主要原因是运能无法匹配,列车具有载客量限制,即:

$$L_{i,m}^{\text{on}} \leq h_v. \quad (22)$$

其中 h_v 为列车的载客量。

5) 平均最大等待时间。为均衡各站乘客平均等待时间,设置变量 t_{\max} ,它的值不小于各站的平均等待时间 \tilde{t}_i ,即:

$$t_{\max} \geq \tilde{t}_i \quad (23)$$

其中 t_{\max} 为车站最大平均等待时间。

3.3 模型求解

由于建立的模型为整数线性规划模型,运用 CPLEX 求解器即可求得最优解。

4 算例分析

4.1 算例数据

为验证本文提出模型的有效性,考虑到计算规模,本节参照文献[10]设置数据,以一个简单的仿真案例进行验证。仿真案例中线路包括单向共 5 个车站、4 个运行区间,车站记为 A,B,C,D,E。考虑到模型的假设,取单位计算时间 $t_0 = 30$ s,计算时长 $T = 60t_0$ 。由于进行客流控制时,为保障尽快满足客流需求,列车的发车间隔已缩至最短,且列车在区间的运行速度达到最大。将相邻列车开行时间间隔设为 120 s,相邻区间运行 120 s,在区间停留为 30 s,列车数 $m = 10$,模型相关参数如表 1 所示。客流需求通过正态分布产生,由于本文考虑前方车站客流需求较大,过早占据运能,所以车站 A 和 B 的客流需求大于车站 C 和 D,各站客流需求如表 2 所示。

表 1 模型相关参数

Tab.1 Model dependent parameter

参数	符号	数值	参数	符号	数值
列车数/列	m	10	控制时段/t	T	60
列车定员/人	h_v	500	车站数/个	J	5
发车间隔/s	t_1	120	站台承载量/人	h_p	500
站间停留时间/s	t_2	30	站内设备通过能力/(人·s ⁻¹)	c	150
区段运行时间/s	t_3	120	相邻时段		
单位控制时长/s	t_0	10	进站台人数差异/人	α	30

$$\text{OD 比例 } e_{i,j} \text{ 为: } e_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

4.2 计算结果与分析

使用 IBM ILOG CPLEX 12.5 进行求解。所有的计算工作在 1 台 Intel i3 3.4 GHz, 32 GB 内存, Window 10 操作系统的计算机上进行求解,计算的终止条件为上下界 Gap 为 1%。接下来对计算的结果进行分析。

4.2.1 计算结果 由于目标函数是一个加权值,所以对 λ 在 0-1 之间进行取值,得到一组由 \tilde{t} 和 t_{\max} 组成的解集, $\tilde{t} = [337.36, 388.9]$, $t_{\max} = [389, 598]$, \tilde{t} 和 t_{\max} 结果如图 5 所示,目标值随权值 λ 变化曲线图如图 6 所示,取值范围为 $[337.36, 388.9]$ 。

4.2.2 结果分析 当对 λ 取不同值时, \tilde{T} , \tilde{t} 和 t_{\max} 变化较大,接下来对 λ 分别取 0, 0.5 和 1 时进行分析。

当 $\lambda = 0$ 时,表示以各站平均等待时间最小为目标进行优化,以均衡各站的等待时间,最大限度的消除因为地铁站点的分布而导致的不公平性。

当 $\lambda = 0.5$ 时,表示既考虑系统的总等待时间又考虑各站的等待时间,对其进行优化。

当 $\lambda = 1$ 时,表示以系统的总等待时间最小为目标进行优化,不考虑各站平均等待时间的差异。

表 2 客流需求表

Tab.2 Passenger flow demand table

车站	A	B	C	D
客流需求/人	2 000	2 000	1 500	1 500

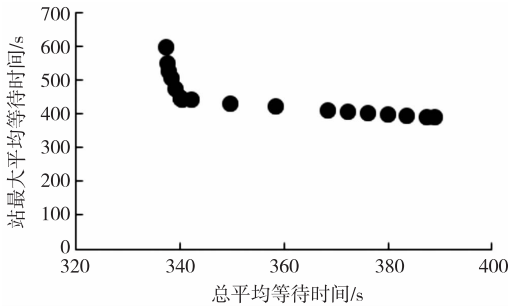


图 4 乘客等待时间

Fig. 4 Passenger waiting time

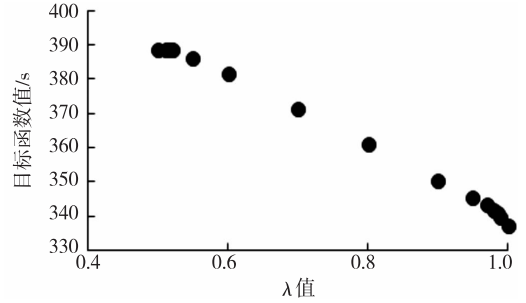


图 5 目标值

Fig. 5 Target value

1) 目标值。如表 3 所示为对应于 λ 取不同值时各目标值,由表可看出,在 λ 取 0.5~1 之间时,各值相差较大,体现了系统和各站之间的矛盾对立性。

2) 各站平均等待时间。如表 4 和图 6 所示为对应于 λ 取不同值时各站的平均等待时间。

表 3 目标值

Tab. 3 Target value s

λ 值	\tilde{T}	\tilde{t}	t_{\max}
0	389	388.99	389
0.5	388.731	387.46	390
1	337.363	337.36	598

表 4 各站平均等待时间

Tab. 4 Average waiting time at each station s

λ 值	各站等待时间			
	A	B	C	D
0	388.98	388.99	389	389
0.5	381.29	389.88	390	389.94
1	79.32	321.23	597.28	443.02

由表 4 和图 6 可看出,当以系统总等待时间最小(即 $\lambda=1$ 时)为目标函数,各站的平均等待时间呈现极大的差异性,A 站最小,为 79.32 s,C 站最大,为 597.28 s;当以各站的平均等待时间最小(即 $\lambda=0$ 时)为目标,各站平均等待时间能达到均衡,均为 389 s,相较于 $\lambda=1$ 时,减小了 C,D 两站的平均等待时间,增加了 A,B 两站的平均等待时间。

3) 乘客乘车动态过程。实施不同的控流措施,乘客乘车的过程也有所不同,接下来对各站在 $\lambda=0, \lambda=0.5$ 和 $\lambda=1$ 时的乘客动态进行分析。

由于当 $\lambda=0$ 和 $\lambda=0.5$ 时,在分析中发现乘客的动态乘车过程类似,为便于比较,以下只列出 $\lambda=0$ 与 $\lambda=1$ 时各站的对比图,如图 7 所示。

由图 7 可知,各站平均等待时间相差较大,A 站、B 站较小,而 C 站和 D 站较大。通过对比发现,相较于以系统总等待平均时间最小为目标,当以各站平均等待时间最小为目标时,A 站和 B 站的乘客乘车动态过程具有明显的变化,在开始阶段乘客进站乘车数量减小,在整个控制时段内,在每个单位时段内的乘客量均不大。由此可知,通过减少在前方车站的上车量,增加后方乘客的上车量来达到每个车站等待时间的均衡。

4) 车站各区域等待人数。对 $\lambda=0, \lambda=0.5$ 和 $\lambda=1$ 时各站各区域等待人数进行分析。由于当 $\lambda=0$ 和 $\lambda=0.5$ 时,客流控制状态类似,为便于比较,以下只列出 $\lambda=0$ 与 $\lambda=1$ 时各站的对比图,如图 8 所示。由于等待在站台的乘客即可乘坐即将到达的列车,所以在站台等待人数即为上车人数。当 $\lambda=0$ 时,4 个车站的乘客量在各时段的乘车量均较为均衡,乘车量都不大;当 $\lambda=1$ 时,A 站的乘客量在控制时段内变化较大,其他 3 个站的变化较小。

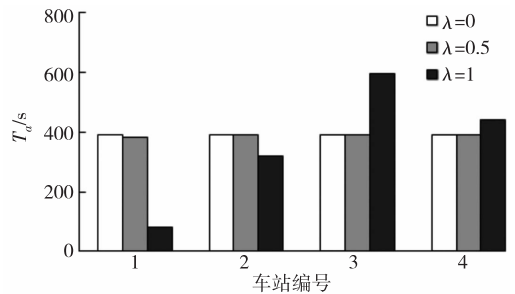


图 6 各站平均等待时间

Fig. 6 Average waiting time at each station

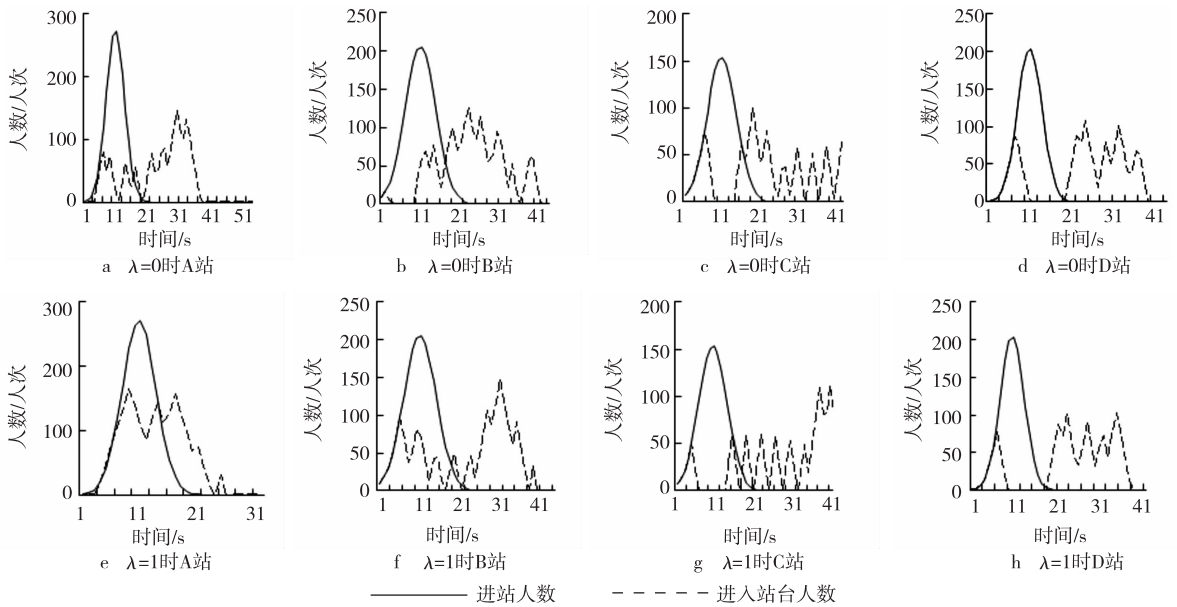


图 7 乘客乘车动态

Fig. 7 Passenger per formance

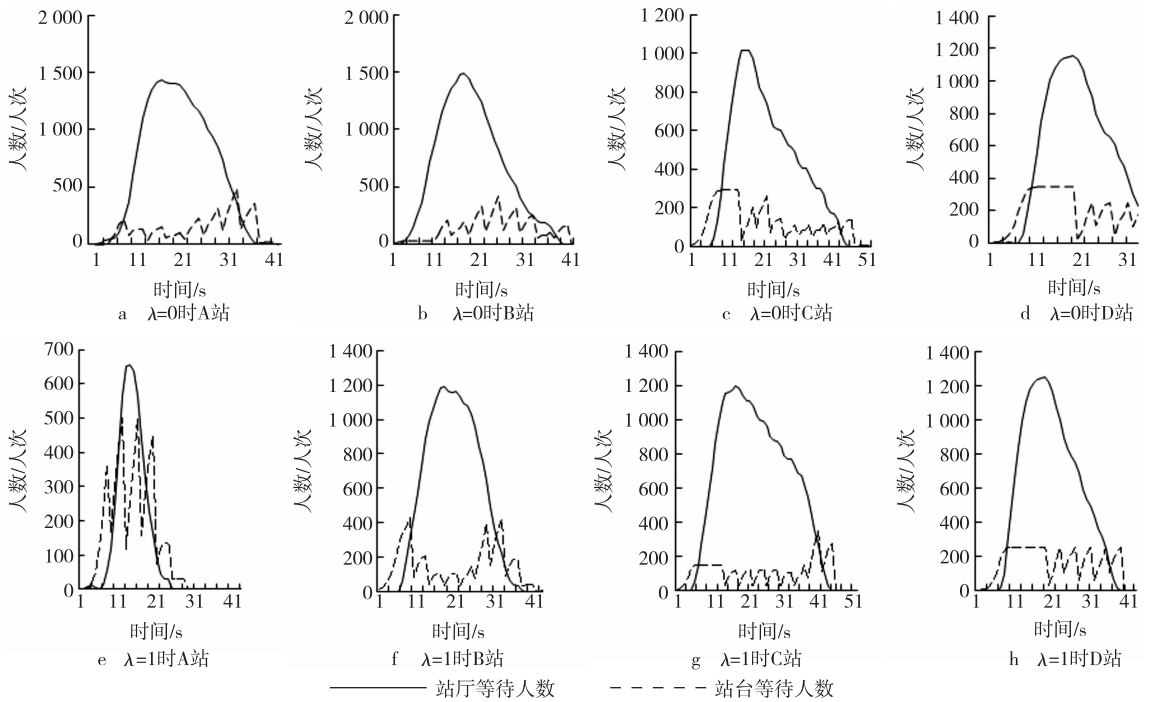


图 8 车站各区域等待人数

Fig. 8 Number of people waiting in each area of the station

对比同一个站在 λ 取不同值时的变化,发现 A 站和 B 站相较于 $\lambda=1$,在 $\lambda=0$ 时开始时段的乘客量减小,整体较为平缓;而 C 站和 D 站则在开始时段乘客量增加,整体变化趋势不变。

4. 2. 3 小结 通过以上对 λ 取不同值时的所对应的目标函数值、各站平均等待时间、列车在各区间载客量、乘客乘车动态过程和车站各区域等待人数的对比分析,得到当同时考虑系统平均等待时间和各站的平均等待时间(即 $\lambda=0.5$)时,通过减小 A 站和 B 站的进站客流量来均衡 C 站和 D 站的平均等待时间,同时系统平均等待时间也得到降低,提高了乘车的公平性。

5 结论

本文从综合考虑系统和均衡各站乘客等待时间的角度出发,建立了考虑以系统平均等待时间最小和以车站

最大平均等待时间最小为目标的优化模型,权值 λ 表示系统平均等待时间最小所占的权重,实际情况中可根据目标的不同选取不同的 λ 值,当 $\lambda=0$ 时,为仅考虑均衡各站的平均等待时间,当 $\lambda=1$ 时,为仅考虑使系统总等待时间最小;运用CPLEX求解器对所建立的线性规划模型进行求解,通过算例进行验证,结果显示此优化模型可以在减小系统总等待时间的同事,均衡各站的平均等待时间。

参考文献:

- [1] 张正,蒋熙,贺英松.城市轨道交通高峰时段车站协同限流安全控制研究[J].中国安全生产科学技术,2013,9(10):5-9.
ZHANG Z,JIANG X,HE Y S.Study on collaborative flow-limiting safety control of urban railway station in peak hours[J].Journal of Safety Science and Technology,2013,9(10):5-9.
- [2] 刘晓华,韩梅,陈超.城市轨道交通车站联合客流控制研究[J].城市轨道交通研究,2014(5):105-108.
LIU X H,HAN M,CHEN C.Study on passenger cooperated-controlling for urban rail stations[J].Urban Mass Transit,2014(5):105-108.
- [3] 姚向明,赵鹏,乔珂,等.城市轨道交通网络客流协同控制模型[J].中南大学学报(自然科学版),2015(1):342-350.
YAO X M,ZHAO P,QIAO K,et al.Coordinated passenger inflow control model of urban rail transit network[J].Journal of Central South University (Natural Science),2015(1):342-350.
- [4] 赵鹏,姚向明,禹丹丹.高峰时段城市轨道交通线路客流协调控制[J].同济大学学报(自然科学版),2014,42(9):1340-1346.
ZHAO P,YAO X M,YU D D.Cooperative passenger inflow control of urban mass transit in peak hours[J].Journal of Tongji University (Natural Science),2014,42(9):1340-1346.
- [5] 石俊刚,杨静,杨立兴.以安全为导向的地铁高峰时段多车站客流协同控制模型[J].交通运输系统工程与信息,2019,19(1):125-131.
SHI J G,YANG J,YANG L X.Safety-oriented cooperative passenger flow control model in peak hours for a metro line[J].Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology,2019,19(1):125-131.
- [6] 蒋琦玮,蔡适,陈维亚,等.城市轨道交通车站客流控制决策模型[J].系统工程,2017,35(9):94-102.
JIANG Q W,CAI S,CHEN W Y,et al.Passenger flow control decision-making method of urban rail transit station[J].System Engineering,2017,35(9):94-102.
- [7] 冯树民,陈勇,辛梦薇.突发大客流下地铁协调限流优化模型[J].哈尔滨工业大学学报,2019,51(2):179-185.
FENG S M,CHEN Y,XIN M W.Coordination passenger flow control model for metro under sudden large passenger flow[J].Journal of Harbin Institute of Technology,2019,51(2):179-185.
- [8] LIU R M,LI S K,YANG L X.Collaborative optimization for metro train scheduling and train connections combined with passenger flow control strategy[J].Omega,2020,90:101990.
- [9] LI S K,DESSOUKY M M,YANG L X,et al.Joint optimal train regulation and passenger flow control strategy for high-frequency metro lines[J].Transportation Research Part B:Methodological,2017,99:113-137.
- [10] SHI J G,YANG L X,YANG J,et al.Service-oriented train timetabling with collaborative passenger flow control on an oversaturated metro line:an integer linear optimization approach[J].Transportation Research Part B:Methodological,2018,110:26-59.
- [11] JIANG M,LI H Y,XU X Y,et al.Metro passenger flow control with station-to-station cooperation based on stop-skipping and boarding limiting[J].Journal of Central South University,2017,24(1):236-244.
- [12] YANG J F,JIN J G,WU J J,et al.Optimizing passenger flow control and bus-bridging service for commuting metro lines[J].Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering,2017,32(6):458-473.
- [13] XU X Y,LIU J,LI H Y,et al.Capacity-oriented passenger flow control under uncertain demand:algorithm development and real-world case study[J].Transportation Research Part E:Logistics and Transportation Review,2016,87:130-148.
- [14] 鲁工圆,马骊,王坤,等.城市轨道交通线路客流控制整数规划模型[J].西南交通大学学报,2017,52(2):319-325.
LU G Y,MA S,WANG K,et al.Integer programming model of passenger flow assignment for congested urban rail lines[J].Journal of Southwest Jiaotong University,2017(2):319-325.
- [15] 董甜甜,谭建春.博弈原理在解决交通拥挤中的分析[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2012,29(2):99-102.
DONG T T,TIAN J C.Analysis on game theory in traffic congestion[J].Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2012,29(2):99-102.

[16] GAO Y, KROON L, SCHMIDT M, et al. Rescheduling a metro line in an over-crowded situation after disruptions

[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2016, 93:425-449.

Operations Research and Cybernetics

A Collaborative Control Model of Urban Rail Transit Passenger Flow Considering the Equalization of Passenger Waiting Time at Each Station

GAN Jinrong, CHEN Zhiya

(School of Traffic and Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: [Purposes] Aiming at the problem that passengers in rear stations have to wait for a long time due to the large demand of passenger flow in front stations and the quick occupation of transportation capacity in the peak period of urban rail transit, a passenger flow control model considering the waiting time of passengers in each station is established. [Methods] Firstly, the dynamic modeling of passenger riding process is carried out, then, an optimization model with the goal of minimizing the average waiting time of the system and minimizing the maximum average waiting time of the station is established, by setting the weights of λ to equalize the average waiting time of every station, when $\lambda=0$, it is only considered to balance the average waiting time of each station, when $\lambda=1$, it is only considered to minimize the total waiting time of the system, the weight can be changed by depending on the problem at hand. [Findings] Since the model is an integer linear programming model, the optimal solution can be obtained by using the CPLEX solver. Finally, an example is used to verify the results. The results show that by setting different weights in the objective function, the average waiting time of each station can be balanced to different degrees. [Conclusions] The model established here not only reduces the total waiting time of the system, but also balances the average waiting time of each station.

Keywords: urban rail transit; passenger flow coordination control; the equalization; the peak hour; waiting time; CPLEX

(责任编辑 陈 乔)

基于患者门诊就医的双任务排序问题*

范静¹, 吴惠静²

(1. 上海第二工业大学 文理学部, 上海 201209; 2. 上海市第一人民医院 医务处, 上海 201600)

摘要:【目的】为解决门诊患者在同一位医生处初次就诊、检查(检验)后确诊两个阶段的优化安排,使门诊患者尽早完成就医诊疗。【方法】将患者门诊就医的问题转化为一个双任务排序问题,建立问题的数学模型,提出一个动态规划算法。【结果】对于这个双任务排序问题,当第一个任务的加工时间与两任务的时间间隔为常数时,此动态规划算法为多项式时间的最优算法。【结论】对于改善医院门诊的叫号系统,提高就医效率提供了重要的研究方法。

关键词: 门诊; 双任务排序; 动态规划算法; 最优解

中图分类号: O223

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2019)06-0031-05

门诊作为患者在就诊过程中最先接触的治疗环节,它的服务质量不仅关系到广大患者对医院医疗服务质量的评价,也会影响到医院的声誉、效益和竞争力^[1-2]。患者在门诊就医流程通常是:挂号—初次就诊—医生开检查(检验)单—缴费并检查(检验)—取得报告—返回原就诊医生处确诊—医生开门诊处方或门诊治疗处置单。由此可见,医生在门诊诊间不仅要面对初次就诊的患者,还要面对检查(检验)后需确诊的患者。目前国内大多数医院的叫号系统仅针对初次就诊的患者叫号,而对于检查(检验)后需确诊的患者疏于管理。因此,在诊间经常会看到拿着检查(检验)单的患者挤在医生的周围,在初次就诊的患者就诊间隙,医生随机穿插地对他们进行确诊治疗。这样不仅秩序混乱,也没有很好地保护就诊者隐私。

目前,针对门诊流程的优化研究主要集中于运用信息化手段提高患者的就医满意度,如自助机、微信等^[3-5]。关于门诊诊间不同就诊阶段的患者叫号安排调度,则有一些文献提出检查后的患者可在叫号系统重新排队^[6],也有一些医院采取了不区分阶段总体“先到先服务”的方法。这些方法虽然操作简单,但缺乏理论论证来评估实际效果。

事实上,上述问题可以转化为单机双任务排序问题。将门诊医生视作加工工件的机器,将患者视作有两个加工任务(即初次就诊与确诊治疗)的工件,两个任务的加工顺序不能交换。从患者结束初诊到拿到检查(检验)报告返回诊间进行确诊治疗,需要一定的时间,即工件第一个任务的完工时刻与第二个任务的开工时刻存在一定的时间间隔。问题的目标是合理安排工件使得最晚加工的工件尽早完工,即最后就诊的患者尽早结束治疗。

双任务排序问题由 Shapiro^[7]于1980年提出,该问题产生于雷达系统的应用,即根据先后传输的雷达脉冲计算某移动目标的速度与轨道。Orman 等人^[8]提出了一些重要的多项式时间算法,Orman 等人^[9]深入研究了该类问题,给出很多不同参数条件下问题的复杂度。Ahr 等人^[10]研究了各工件两阶段任务的加工时间以及时间间隔取值分别相等的情形,Potts 等人^[11]对此问题提出启发式算法,Li 等人^[12]提出了禁忌搜索算法,Philippe^[13]在文献^[10]的基础上证明时间间隔为常数时,此问题可转化为最短路径问题,并在多项式时间内得到最优解。更多的研究结果可参阅综述文献^[14]。

受文献^[10,13]的启发,本文将门诊医生诊治不同阶段患者的问题转化为单机双任务排序问题后,研究各工件两阶段任务的加工时间以及时间间隔取值分别相等,且第一个任务的加工时间与两任务的时间间隔为常数的情形。文中第一部分介绍问题,并给出问题的模型,第二部分给出表示机器加工状态的模式及相关结论,第三部

* 收稿日期:2018-08-20 修回日期:2019-06-20 网络出版时间:2019-11-18 15:14

资助项目:国家自然科学基金(No. 11601316);上海第二工业大学应用数学学科项目(No. XXKPY1604);上海第二工业大学资源循环科学与工程中心支持项目-上海市高原学科-环境科学与工程(资源循环科学与工程)项目

第一作者简介:范静,女,副教授,博士,研究方向为组合最优化,E-mail:fanjing@sspu.edu.cn;通信作者:吴惠静,女,助理研究员,E-mail:synymb@126.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191118.1514.002.html>

分提出动态规划算法,并通过理论证明及实例分析,表明该算法的最优性。

1 预备知识

本部分主要介绍单机双任务问题的模型及最优解的存在性。

给定一台机器及工件集 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ 。工件 $J_i (1 \leq i \leq n)$ 有两个不同的任务 O_i^1 及 O_i^2 , 任务 O_i^1, O_i^2 所需的加工时间分别为 a_i, b_i 。机器完成第一个任务 O_i^1 后的 L_i 时刻加工第二个任务 O_i^2 。工件的加工需按照编号顺序进行,即对于两个不同工件 J_i 与工件 $J_j (1 \leq i < j \leq n)$, 任务 O_j^1 须安排在 O_i^1 完工后加工, 任务 O_j^2 须安排在 O_i^2 完工后加工。机器一次只能不间断地加工一个工件的任务。本文研究一个特殊情形,即 $a_i = a, L_i = L, b_i = b$ 。目标函数为最小化最大完工时间,记为 C_{max} 。利用 Graham 等人^[3]提出的三参数法,研究的问题可简记为 $1|Coup-Task, (a, L, b)|C_{max}$ 。

若用 C_i^1, C_i^2 表示工件 $J_i (1 \leq i \leq n)$ 的任务 O_i^1, O_i^2 的完工时间,则 $C_{max} = C_n^2$ 。

这里假设 $(n-1)a > L > a$ 。否则, n 个工件依次完成加工任务,即可得到最优解 $C_{max} = n(a+L+b)$ 。

文中研究的问题可写成一个线性规划模型^[13]:

$$\begin{cases} \min & C_n^2 \\ \text{s. t.} & C_i^2 = C_i^1 + L + b, i = 1, 2, \dots, n \\ & C_i^1 \geq C_{i-1}^1 + a, i = 1, 2, \dots, n \\ & C_i^2 \geq C_{i-1}^2 + b, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

其中 $C_0^1 = 0, C_0^2 = a + L$ 。

线性规划问题(1)有最优解^[13],可用单纯形法进行求解,得到最优解。但由于单纯形法不是多项式时间算法,因此,将在文中提出一个适用于问题(1)的多项式时间算法。

另外,由于以下定理的成立,所以假设 $a \geq b$ 。

定理 1^[9] 问题 $1|Coup-Task, (a, L, b)|C_{max}$ 与问题 $1|Coup-Task, (b, L, a)|C_{max}$ 是等价的。

2 机器加工过程的状态模式

为了借助文献[10]中表示机器加工过程的状态模式,并提出求解此问题的多项式时间算法,假设问题中所有参数的取值为整数。实际上,可以通过乘以适当的数字,将所有参数转变为整数。在文献[10]中,用 1 表示在一个单位时间内机器处于加工状态;用 0 表示在一个单位时间内机器处于空闲状态。

定义 1^[10] 模式 $P(a, L, b)$ 是指长度为 L 的全 0 序列,或 0-1 序列。若是 0-1 序列,则该序列中有一组或多组连续 b 个 1,且每组 1 后面有至少 $(a-b)$ 个 0。

值得注意的是,模式 $P(a, L, b)$ 反映的是安排加工当前工件 $J_i (1 \leq i \leq n)$ 时,从 O_i^1 的完工时间到 O_i^2 的开工时间,机器在每个单位时间内将出现的空闲或加工状态。

例如,对于 $a=2, L=3, b=1$ 的实例,安排工件 J_1 的两个任务 O_1^1 及 O_1^2 后的模式为(0 0 0)。图 1 直观地表示了安排工件 J_1 后机器加工的状态及对应的模式。

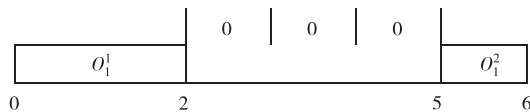


图 1 安排工件 J_1 后机器的加工状态及对应的模式

Fig. 1 The pattern corresponding to the machine situation after assigning job J_1

文献[13]已证明,模式 $P(a, L, b)$ 的总个数至多有 $a^{\frac{L}{a-b}}$ 个。

下面给出机器新加工状态模式的定义。

定义 2^[10] 设 $P[i]$ 表示模式 $P(a, L, b)$ 中第 $i (1 \leq i \leq L-a+1)$ 个位置的数字。当 $P[i] = P[i+1] = \dots = P[i+a-1] = 0$ 时, $Q[P, i]$ 定义为由模式 $P(a, L, b)$ 生成的新模式:

$$(P[i+a] \ P[i+a+1] \ \dots \ P[L] \ \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{b \text{ 个}} \ \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{(i+a-b-1) \text{ 个}})$$

为简便起见,记为 $Q[P,i]=(P[i+a] \ P[i+a+1] \ \dots \ P[L] \ 1 \ b \ 0 \ (i+a-b-1))$ 。

显然,由于机器在加工当前工件的第一个任务后,要在第 i 时刻加工新工件的第一个任务,便生成了新模式 $Q[P,i]$ 。

例如,对于 $a=2,L=3,b=1$ 的模式 $(0 \ 0 \ 0)$,当 $i=1$ 时,生成的新模式为: $Q[(0,0,0),1]=(0 \ 1 \ 0)$;当 $i=2$ 时,生成的新模式为 $Q[(0,0,0),2]=(1 \ 0 \ 0)$ 。图 2 及图 3 分别表示了 $i=1$ 与 $i=2$ 时,安排加工工件 J_2 后机器的加工状态及对应模式的转换情况。

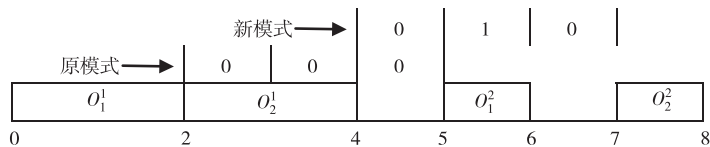


图 2 当 $i=1$ 时,工件 J_2 的加工情况及模式的转换

Fig. 2 The change of the pattern after assigning job J_2 when $i=1$

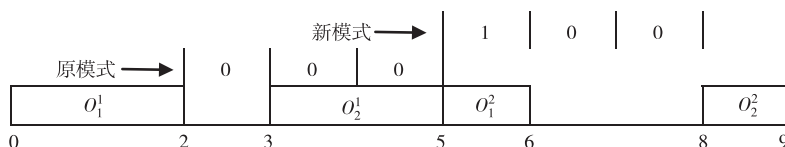


图 3 当 $i=2$ 时,工件 J_2 的加工情况及模式的转换

Fig. 3 The change of the pattern after assigning job J_2 when $i=2$

由定义 2 可得引理 1。

引理 1^[10] 新模式 $Q[P,i]$ 对应的目标函数值比模式 $P(a,L,b)$ 增加了 $i+a-1$ 。

下面的引理本质上与定义 2 是一致的,均描述了由一个模式是如何产生新模式的,但引理 2 的提出使得条件与结论更加清晰,在实际计算中操作性更强。

引理 2^[10] 给定模式 $P(a,L,b)$,对于满足 $P \bmod 2^{L-i+1} < 2^{L-i-a+1}$ 的所有 $i(1 \leq i \leq L-a+1)$,得到的新模式 $Q[P,i]$ 为 $Q[P,i]=(P \bmod 2^{L-i-a+1})2^{i+a-1} + (2^b - 1)2^{i+a-b-1}$ 。

例如,对于 $a=2,L=3,b=1$ 的模式 $P=(0 \ 0 \ 0)$, $i=1$ 满足条件 $P \bmod 2^3 = 0 < 2^1 = 2$,得到的新模式为 $Q[P,1]=0+2^1=2$,用二进制表示为 $(0 \ 1 \ 0)$; $i=2$ 满足条件 $P \bmod 2^2 = 0 < 2^0 = 1$,得到的新模式为 $Q[P,2]=0+2^2=4$,用二进制表示为 $(1 \ 0 \ 0)$ 。这与定义 2 所得到的结果一致。

3 动态规划算法 DP

本部分主要介绍动态规划算法,并分析算法的性能。

动态规划算法 DP 定义值函数:设 $F(j,S(j))$ 表示加工完成前 j 个工件的最优目标函数值,其中 $S(j)$ 表示机器加工第 j 个工件时所有可能模式的集合。

初始条件: $F(1,S(0))=a+L+b$;

递推公式:对于 $1 \leq j \leq n-1$,有:

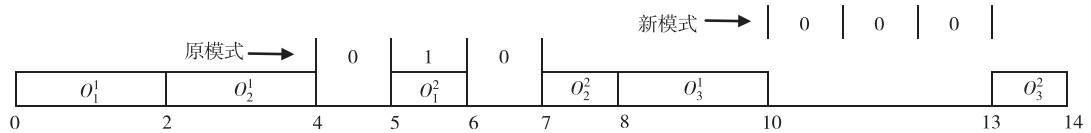
$$F(j+1,S(j+1)) = \min\{F(j,S(j))+(i+a-1), F(j,S(j))+(a+L+b) \mid Q[P,i] \in S(j+1), P \in S(j)\},$$

其中, $S(j+1) = \{Q[P,i] \mid P \bmod 2^{L-i+1} < 2^{L-i-a+1}, 1 \leq i \leq L-a+1, P \in S(j)\} \cup \{0(L)\}$, $S(0) = 0(L)$;

最优值: $F(n,S(n))$ 。

这里需要说明的是,对于 $P \in S(j)(j < n-1)$ 中所有位置 $i(1 \leq i \leq L-a+1)$,如果均不满足条件 $P \bmod 2^{L-i+1} < 2^{L-i-a+1}$,则生成的新模式必为 $(0(L))$,目标函数值的增量为 $a+L+b$ 。此时,工件 J_{j+1} 的第一个任务 O_{j+1}^1 紧接在工件 J_j 的第二个任务 O_j^2 后加工。

例如,对于 $a=2,L=3,b=1$ 的模式 $P=(0 \ 1 \ 0)$, $i=1$ 时 $P \bmod 2^3 = 2 = 2^1$, $i=2$ 时 $P \bmod 2^2 = 2 > 2^0 = 1$,均不满足定理 2 的条件,则新模式为 $(0 \ 0 \ 0)$ 。图 4 表示在图 2 基础上安排加工工件 J_3 后机器的加工状态及对应模式的转换情况。

图 4 在图 2 基础上工件 J_3 的加工情况及模式的转换Fig. 4 The change of the pattern after assigning job J_3 based on Fig. 2

定理 2 对于问题 $1|Coup-Task, (a, L, b)|C_{\max}$, 动态规划算法 DP 可得到最优解。当 a 与 L 为常数时, 算法的运行时间为 $O(n)$ 。

证明 动态规划算法 DP 对于前 $j(1 \leq j \leq n-1)$ 个工件的加工安排, 考虑了所有可能的加工情形。值函数 $F(j, S(j))$ 是经过比较所有可能的目标函数值后得到的最小值, 因此 $F(n, S(n))$ 得到的必为最优目标函数值。动态规划算法 DP 中包含 n 个阶段, 每个阶段至多有 a^{L-1} 个状态, 每个状态需要 $O(1)$ 时间以确定下一个状态对应的目标函数值。因此, 动态规划算法 DP 的时间复杂性为 $O(na^{L-1})$ 。当 a 与 L 为常数时, 算法的运行时间为 $O(n)$ 。证毕

下面通过一个实例, 说明动态规划算法 DP 的计算过程。

对于 $a=2, L=3, b=1$ 的实例, 当 $n=3$ 时, 根据动态规划算法 DP, 有:

$$S(3) = \{Q[(1 \ 0 \ 0), 2] = (1 \ 0 \ 0)\} \cup \{(0 \ 0 \ 0)\}.$$

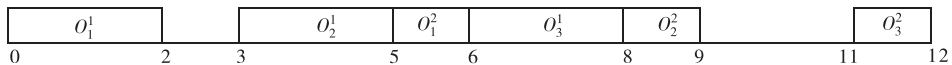
这里的 $\{(0 \ 0 \ 0)\}$ 即为图 4 的新模式。此时, 根据递推公式可得:

$$F(3, (1 \ 0 \ 0)) = \min \{F(2, (1 \ 0 \ 0)) + (2+2-1), F(2, (1 \ 0 \ 0)) + (2+3+1)\} = 12,$$

$$\text{以及 } F(3, (0 \ 0 \ 0)) = \min \{F(2, (0 \ 1 \ 0)) + (2+3+1), F(2, (1 \ 0 \ 0)) + (2+3+1)\} = 14.$$

因此, 最优解为: $F(3, S(3)) = \min \{F(3, (1 \ 0 \ 0)), F(3, (0 \ 0 \ 0))\} = 12$ 。

图 5 表示了 3 个工件的最优序。从工件加工的安排来看, 图 4 中这 3 个工件的安排实际上是按“先到先服务”的思想得到的, 对应的目标函数值已经比最优值大了。随着工件个数的增加, 两者的差距会越来越大。

图 5 $n=3$ 时的最优序Fig. 5 The optimal scheduling for $n=3$

通过上述分析可知, 在医院门诊看病的实际情况中, 对于不同就诊阶段患者的叫号安排, 如果简单地按照“先到先服务”的想法安排叫号系统, 医生的工作效率明显会降低, 患者也不能尽早结束就医。因此, 可以从动态规划算法出发, 合理安排不同就诊阶段患者的叫号进程, 提高医生的工作效率和服务质量, 改善患者就诊的环境, 更减少不必要的等待时间, 提升医院的整体竞争力。

参考文献:

- [1] 谢洋. 公立医院门诊业务流程再改造研究: 以河北医科大学第二医院为例[D]. 石家庄: 河北经贸大学, 2018.
XIE Y. Business process reengineering of public hospitals outpatient: a case study in the second hospital of Hebei Medical University[D]. Shijiazhuang: Hebei University of Economics and Business, 2018.
- [2] 李钟仁. 上海大型公立医院门诊服务流程优化对策研究: 基于 SJ 医院案例的分析[D]. 上海: 上海师范大学, 2014.
LI Z R. Study on optimization of outpatient service process in large public hospitals in Shanghai: based on SJ hospital case analysis[D]. Shanghai: Shanghai Normal University, 2014.
- [3] 吴强山. 利用信息化技术优化改造门诊流程[D]. 苏州: 苏州大学, 2015.
WU Q S. Optimizing outpatient process by information technology[D]. Suzhou: Suzhou University, 2015.
- [4] 庄菲. 基于自助机的门诊流程信息化探索[J]. 医学信息学杂志, 2018, 39(3): 29-32.
ZHUANG F. Exploration into outpatient process informatization based on self-help machines[J]. Journal of Medical Intelligence, 2018, 39(3): 29-32.
- [5] 秦涵书, 刘兆海, 袁雪莉, 等. 微信在优化门诊流程中的应用[J]. 中国数字医学, 2018, 13(4): 112-114.
QIN H S, LIU Z H, YUAN X L, et al. Application of We-

- Chat in optimizing outpatient service process[J]. *China Digital Medicine*, 2018, 13(4): 112-114.
- [6] 陈建清, 马真一. 智慧医疗推动门诊服务流程再造的探索与实践[J]. *电脑与电信*, 2018(Z1): 58-60.
CHEN J Q, MA Z Y. The exploration and practice of intelligent medical treatment to promote the reengineering of outpatient service process[J]. *Computer & Telecommunication*, 2018(Z1): 58-60.
- [7] SHAPIRO R D. Scheduling coupled tasks[J]. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1980, 27: 477-481.
- [8] ORMAN A J, POTTS C N, SHAHANI A K, et al. Scheduling for the control of a multifunctional radar system[J]. *European Journal of Operational Research*, 1996, 90: 13-25.
- [9] ORMAN A J, POTTS C N. On the complexity of coupled tasks scheduling[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 1997, 72: 141-154.
- [10] AHR D, BEKESI J, GALAMBOS G, et al. An exact algorithm for scheduling identical coupled tasks[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2004, 59(2): 193-203.
- [11] POTTS C N, WHITEHEAD J D. Heuristics for a coupled operation scheduling problem[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2007, 58(10): 1375-1388.
- [12] LI H, ZHAO H. Scheduling coupled tasks on a single machine[J]. *IEEE Symposium on Computational Intelligence in Scheduling*, 2007(1/2/3/4/5): 137-142.
- [13] PHILIPPE B. A note on scheduling identical coupled tasks in logarithmic time [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2010, 158(5): 583-587.
- [14] BLAZEWICZ J, PAWLAK G, TANAS M, et al. New algorithms for coupled tasks scheduling; a survey[J]. *Rairo-Operations Research*, 2012, 46(4): 335-353.

Operations Research and Cybernetics

Coupled-task Scheduling Based on Outpatient Treatment Process

FAN Jing¹, WU Huijing²

(1. College of Arts and Sciences, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209;

2. Medical Department, Shanghai General Hospital, Shanghai 201600, China)

Abstract: [Purposes] The goal is to optimize the arrangement of patients in the clinic and complete the treatment process as early as possible for them during two stages, the first visit and the diagnosis after medical examination (or test). [Methods] This outpatient treatment problem can be transformed into a coupled-task scheduling problem. The mathematic model of the problem is established and a dynamic programming algorithm is proposed. [Findings] For the coupled-task scheduling problem, the optimal schedule can be obtained by this dynamic programming algorithm whose running time is polynomial if the processing time of the first task and the gap between two tasks are fixed constants. [Conclusions] It provides an important research method for improving the outpatient call system and improving the efficiency of medical treatment in the hospital.

Keywords: outpatient treatment; coupled-task scheduling; dynamic programming algorithm; the optimal solution

(责任编辑 黄 颖)